ネットワーク設計問題の最先端

福永　拓郎

各点間に十分な連結度をもつネットワークを低コストで構築することを要求する最適化問題を，ネットワーク設計問題という．ネットワーク設計問題に関する理論研究の最近の進展の中心にあるのが，反復丸め法と呼ばれる手法である．本稿では，この反復丸め法について解説する．

キーワード：ネットワーク設計問題，連結性，反復丸め法

1. はじめに

人里離れた村で殺人事件が起こる．村人たちは助けを求めに街へ出ようとするが，そのための唯一の道路は土砂崩れで寸断され……．

ミステリーの定番の光景である．定番だからといっておもしろいとは限らないが，それはともかく，一カ所の道路が寸断されたらすぐに孤立してしまうような村が存在するのは問題である．そういうことがないように道路を通してあげたいところだが，できるだけ出費は抑えたい．そんなあなたにネットワーク設計問題である．

ネットワーク設計問題とは，私の理解では，ある種の要求を満たすネットワークを低コストで構築することを要求する最適化問題の総称である．本稿ではその中でも特に，サバイバルネットワーク設計問題（または，シュタイナーネットワーク問題）と呼ばれる次の問題を取り上げることにする．

サバイバルネットワーク設計問題：入力として，

- 点集合 V と辺集合 E によって構成される無向グラフ $G=(V,E)$
- 各辺 $e\in E$ のコスト $c(e)$
- 各2点 u,v 間の連結度要求 $r(u,v)$

が与えられている．このとき，辺集合 E の部分集合 F から定義される G の部分グラフ (V,F) のうち各2点 u,v 間の連結度が要求 $r(u,v)$ 以上になるようなものの中で，使用する辺のコストの合計 $\sum_{e\in F}c(e)$ を最小化するものを求めよ．

ふくなが　たくろう
京都大学 大学院情報学研究科
〒606-8501 京都市左京区吉田本町

連結度とは，グラフによって表現されるネットワークにおいて2点間の結びつきの強さを表す指標である代表的なものに辺連結度と点連結度がある．点 u と点 v の間の辺連結度とは，u と v を非連結にするためにグラフ G から取り除く必要のある辺の最小本数のことであり，慣習として $\lambda(u,v)$ で記されることが多い．点連結度は，u と v が隣接していない場合は，グラフから点（とそれに接続している辺）を取り除いてこれらを非連結にする際に，取り除かなければならない最小個数と定義され，$\kappa(u,v)$ で表される．隣接している場合は，点に加え u と v を結ぶ辺もカウントすることにする．以降簡単のため，辺連結度の要求を持つ上記の問題を辺連結ネットワーク問題，点連結度の要求を持つ問題を点連結ネットワーク問題と呼ぶ

これらの連結度の定義は，グラフ理論の教科書や講義などには大抵出てくる基礎的な概念だと思う．またサバイバルネットワーク設計問題はこれらの連結度から定義される自然な問題であることに異論はないだろう．実際，この問題は多くの古典的な組合せ最適化問題を特殊ケースとして含んでいる．例えば，連結度の要求を $r(u,v)=1(u,v\in V)$ とした場合（このとき辺連結度要求と点連結度要求に違いはない）は，コスト最小の全域木を求める問題に一致しており1930年代～50年代頃にはすでにクラスカル，プリム，ヤルニークらによってアルゴリズムが与えられている．しかしながら同時に，まだまだ未解決な部分もたくさん残されており，最近も活発に研究され多くの進展も得られているホットな研究課題でもある．特にその最近の進展の中心にあるのは，反復丸め法と呼ばれる手法である．本稿ではこの反復丸め法を簡単に解説する．

2. 辺連結ネットワーク問題

サバイバルネットワーク設計問題のうち，最も研究が進んでいるのが辺連結度の要求を制約として持つ問題である．この問題は，最小全域木問題のような特殊なケースはともかくほとんどの場合でNP困難なので，近似アルゴリズムによってどれだけ良い近似精度の保証を得られるかが関心事である．ある多項式時間アルゴリズムが常に最適値のα倍以下の実行可能解を出力するとき，そのアルゴリズムはα近似アルゴリズムと呼ばれ，近似精度を表すαは近似比と呼ばれる．

組合せ最適化の分野におけるアルゴリズムの代表的な設計手法の一つが主双対法である．この手法はGoemans, Williamson[6]により辺連結ネットワーク問題に応用され，任意の$u, v\in V$について$r(u, v)\in\{0,1\}$の場合（シュタイナー森問題と呼ばれる）に対する2近似アルゴリズムを得ることに成功した．この結果以降も主双対法は様々な組合せ最適化問題の近似アルゴリズム設計に適用されて成功を収めたが，残念ながら辺連結ネットワーク問題の最も一般的なケースに対しては2倍はおろか，定数倍の近似精度さえも得ることはできずにいた．その状況を打ち破ったのが，反復丸め法である．Jain[7]は反復丸め法を用いて辺連結ネットワーク問題の最も一般的なケースについて2近似アルゴリズムを与えることに成功した．彼のアルゴリズムを簡単に紹介しよう．

辺連結度の要求は，グラフのカットを被覆する辺の本数についての要求として表現できる．点集合$X\subset V$に対して$R(X)$を$\max_{u\in X, v\in V\setminus X} r(v, v)$と定義する．また，$X\subset V$と$F\subseteq E$に対して$\delta_F(X)$を，$F$に含まれる辺のうち$X$内の点と$V\setminus X$内の点を結ぶものの集合と定義する．すると辺連結度ネットワーク問題は，各辺$e\in E$について定義された0-1変数$x(e)$を用いて次のような0-1整数計画問題に定式化できる．

$$\begin{aligned}\min\quad & \textstyle\sum_{e\in E} c(e)x(e)\\ \text{s.t.}\quad & \textstyle\sum_{e\in\delta_E(X)} x(e)\geq R(X),\quad \emptyset\neq\forall X\subset V,\\ & x(e)\in\{0,1\},\quad \forall e\in E.\end{aligned}$$

多くの組合せ最適化問題は線形計画法と切っても切れない関係にあるといっても良いと思うが，サバイバルネットワーク設計問題では特にその傾向が顕著である．反復丸め法の基本形では，

1．線形計画緩和問題の最適解x^*を求める

2．いくつかの変数を整数に丸めて固定する

というステップを，すべての変数が固定されるまで繰り返す．辺連結ネットワーク問題では具体的には以下のようになる．

ある時点で対応する変数が固定された辺の集合を$F\subseteq E$，その固定された変数の値を$\tilde{x}\in\{0,1\}^F$，$E\setminus F$を$\bar{F}$で表すとする．また，$X\subset V$について$R(X)-\sum_{e\in\delta_F(X)}\tilde{x}(e)$を$\bar{R}(X)$で表そう．線形計画問題LP($F$)を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\min\quad & \textstyle\sum_{e\in\bar{F}} c(e)x(e)\\ \text{s.t.}\quad & \textstyle\sum_{e\in\delta_{\bar{F}}(X)} x(e)\geq\bar{R}(X),\quad \emptyset\neq\forall X\subset V,\\ & 0\leq x(e)\leq 1,\quad \forall e\in\bar{F}.\end{aligned}$$

LP($\emptyset$)は上で与えた0,1整数計画問題の緩和問題となっている．Jainのアルゴリズムでは，最初に$F=\emptyset$としてスタートする．各反復の最初でアルゴリズムはLP(F)の最適解x^*を計算する．このx^*について，$x^*(e)=0$となる変数が存在すれば，その変数を0に固定する．また，ある定数αについて$x^*(e)\geq 1/\alpha$となる変数が存在した場合は，その変数を1に固定する．これらの条件を満たす変数をすべて固定したら，一回の反復の終了である．アルゴリズムはこれを繰り返し，すべての変数が固定されたら終了である．

アルゴリズムの終了時点で変数が1に固定された辺の集合が，辺連結ネットワーク問題のα近似解となっていることを示すのはそれほど難しくない．難しいのは，LP(F)が必ず$x^*(e)=0$もしくは$x^*(e)\geq 1/\alpha$となる辺$e\in\bar{F}$を持つことを保証することである．もしこのことを保証できなければ，アルゴリズムが途中でどの変数も固定できなくなり，立ち往生してしまうからである．αを大きくすればするほどこの保証を得るのは簡単であるが，そうすると近似比が大きくなってしまう．肝心なのは，いかに小さなαでこの保証を得るかである．

Jainの2近似アルゴリズムではこの保証を得るために，x^*をただの最適解ではなく端点解とした．端点解の特徴は，端点解によって等号が成立している制約のうち互いに一次独立なものが変数の数と同じだけ存在し，端点解はそれらの等式から成る連立一次方程式の唯一の解になっているということである．

x^*によって等号が成立している連結度制約を与える点集合の族をνとしよう（つまり，$\nu=\{X\subset V|\sum_{e\in\delta_{\bar{F}}(X)} x^*(e)=\bar{r}(X)\}$）．集合族に含まれる任意の集合$X, Y$について$X\subseteq Y$，$Y\subseteq X$，もしくは$X\cap Y=\emptyset$のどれかが必ず成り立つとき，その集合族はラミナーと呼ばれる．Jainは，x^*を決定する一次独立な

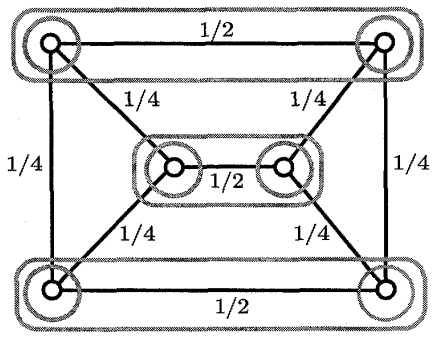

図1　端点解 x^* とラミナー部分集合族 $\mathcal{V}'$ の例

制約集合に含まれる連結度制約は，$\mathcal{V}$ のあるラミナー部分族 $\mathcal{V}'\subseteq\mathcal{V}$ を構成する点集合によって定義されることを証明し，そのことから端点解 x^* が次の特徴を必ず持つことを示した．

定理1．LP(F) の基底解 x^* について，$x^*(e)=0$ もしくは $x^*(e)\geq 1/2$ となる辺 $e\in\bar{F}$ が必ず存在する．

この定理により，反復丸め法の枠組みによって2近似アルゴリズムが得られることが分かる．図1は，あるグラフの端点解 x^* とその端点解を与えるラミナー部分集合族 $\mathcal{V}'$ の一例である．この例では，$F=\emptyset$ であり，辺連結度要求は任意の $u, v\in V$ について $r(u, v)=1$ と設定している．各辺の脇の数字がその辺に対する x^* の値，灰色の線で囲まれた点集合が $\mathcal{V}'$ を構成する点集合を示している．

定理1はLP(F) の制約に現れる集合関数 $\bar{R}$ を任意の歪優モジュラ集合関数 f に置き換えても成立する．歪優モジュラ集合関数とは，任意の $X, Y\subset V$ について

$$f(X)+f(Y)\leq f(X\cap Y)+f(X\cup Y),$$

もしくは，

$$f(X)+f(Y)\leq f(X\setminus Y)+f(Y\setminus X)$$

を満たす関数 f のことである．関数 $\bar{R}$ は歪優モジュラである．

3.　その他の連結性

2節で述べたように辺連結ネットワーク問題については，反復丸め法によってうまく解けることが分かった．辺連結度と異なる連結性の概念としては，1節でも述べたように点連結度がある．この点連結度と辺連結度の間に位置する概念として，要素連結度と呼ばれるものもある．要素連結度は，グラフ内で指定された端点と呼ばれる点の間でのみ定義される．以降，$T\subseteq V$ でグラフ内の端点集合を表す．グラフ内のすべての辺と，端点でない点を要素と呼ぶ．2つの端点 u, v 間の要素連結性は，この2点を非連結にするために除かなければならない要素の数の最小値と定義される．これは，端点上にあるサーバは故障することがないと仮定したときのネットワークでの，サーバ間の耐故障性を表しているともとれる．また，グラフを一般化したハイパーグラフ上での辺連結度も含んだ概念でもある．どの2点間についても，

辺連結度≥要素連結度≥点連結度

の関係が成り立つことは，それぞれの定義において2点間を非連結にするために取り除くことができるものの範囲を考えると理解できる．

要素連結度の要求を持つサバイバルネットワーク設計問題では，入力が1節で定義したものとは若干違い，無向グラフ $G=(V, E)$，辺コスト c に加えて端点集合 $T\subseteq V$ が与えられ，連結度要求 $r(u, v)$ は2つの端点 $u, v\in T$ 間にのみ定義される．問題の制約や目的関数の定義は，連結度の要求を端点間の要素連結度とする以外は同様である．以降簡単のために，このときのサバイバルネットワーク設計問題を要素連結ネットワーク問題と呼ぶ．

要素連結度や点連結度に関する要求は，辺連結性の場合のように点集合によって定義されるカットの被覆問題としては定式化できない．代わりに，点集合対上に定義された関数 $R: 2^V\times 2^V\to\Re$ を用いて以下のような形に定式化できる．

$$\begin{aligned}&\min\ \textstyle\sum_{e\in E}c(e)x(e)\\ &\text{s.t.}\ \textstyle\sum_{e\in\delta_E(X,Y)}x(e)\geq R(X, Y),\ \forall(X, Y)\in 2^V\times 2^V,\\ &\qquad x(e)\in\{0, 1\},\quad \forall e\in E.\end{aligned}$$

ただし，$\delta_E(X, Y)$ は，E に含まれる辺のうち X 内の点と Y 内の点を結ぶものの集合である．この問題を，集合対関数被覆問題と呼ぶ．$R(X, Y)$ を，$X\cap Y=\emptyset$ のとき $R(X, Y)=\max_{u\in X, v\in Y}r(u, v)-|V\setminus(X\cup Y)|$，それ以外のとき $R(X, Y)=0$ と定義すると，上の問題は点連結ネットワーク問題となる．$X\cap Y=\emptyset$ かつ $T\subseteq X\cup Y$ のとき $R(X, Y)=\max_{u\in X, v\in Y}r(u, v)-|V\setminus(X\cup Y)|$，それ以外のとき $R(X, Y)=0$ とすれば，要素連結ネットワーク問題となる．ちなみに，$Y=V\setminus X$ のとき $R(X, Y)=\max_{u\in X, v\in Y}r(u, v)$，それ以外のとき $R(X, Y)=0$ とすれば，辺連結度ネットワーク問題と一致する．

では，どうやってこれらの問題を解くか？　2節で紹介したJainによるアルゴリズムは，Fleischer, Jain, Williamson[4]によって，集合対関数に拡張されている．集合対関数 f が歪優モジュラとは，任意

の $(X, X'), (Y, Y') \in 2^V \times 2^V$ について，

$$f(X, X') + f(Y, Y') \leq f(X \cup Y, X' \cap Y') + f(X \cap Y, X' \cup Y),$$

または

$$f(X, X') + f(Y, Y') \leq f(X \cap Y', X' \cup Y) + f(X' \cap Y, X \cup Y')$$

が成立することを意味する．彼らは，集合対関数が歪優モジュラのとき，集合対関数被覆問題に対する2近似アルゴリズムが反復丸め法によって定義できることを示した．

要素連結度の要求から定義される集合対関数は歪優モジュラとなっている．よって要素連結ネットワーク問題は，彼らの結果により2近似アルゴリズムが与えられたことになる．一方，点連結度要求から定義される集合対関数は残念ながら歪優モジュラとならない．文献[4]では，任意の $u, v \in V$ について $r(u, v) \in \{0, 1, 2\}$ のときでも集合対関数は歪優モジュラとはならないものの，反復丸め法によって2近似アルゴリズムが得られることを上の結果と同時に示している．

点連結ネットワーク問題は辺連結ネットワーク問題や要素連結ネットワーク問題よりも近似可能性の点でずっと難しいことが分かっている．特に $r_{\max} = \max_{u,v} r(u, v)$ が大きいときは難しく，Kortsarz, Kraughgamer, Lee[9]では $r_{\max} = \Omega(|V|)$ のとき，任意の定数 $\epsilon > 0$ について $2^{\log^{1-\epsilon}|V|}$ 近似アルゴリズムが存在しないことを適切な仮定の元で示している．この近似困難性の結果はさらにChakraborty, Chuzhoy, Khanna[3]やNutov[12]によって改善されている．

点連結ネットワーク問題について現在知られている最良のアルゴリズムはChuzhoyとKhanna[2]によって提案された確率アルゴリズムで，近似比 $O(r_{\max}^3 \log |V|)$ を達成する．このアルゴリズムは，点連結ネットワーク問題を複数の要素連結ネットワーク問題に分解し，それぞれの問題の解の和を出力するものとなっている．要素連結ネットワーク問題を解くにはFleischer, Jain, Williamson[4]の2近似アルゴリズムを使用するので，この結果も間接的に反復丸め法に基づいていることになる．

点連結ネットワーク問題については近似比が $r_{\max}$ にのみ依存する近似アルゴリズムが存在するのではないかという予想がなされている．ChuzhoyとKhannanoのアルゴリズムの近似比は $r_{\max}$ だけではなく $|V|$ に依存する形になっているので，この予想は今のところ未解決ではあるが，連結度要求 r や辺コスト c に制限を加えると多くの場合で成り立つことが近年分かってきている．例えば，ある一つの点 $s \in V$ を指定し，$r(u, v)$ が正の値をとるのは $s \in \{u, v\}$ のときのみとなるような場合，r のことを根付きの連結度要求と呼ぶことがある．根付きの連結度要求については，ChuzhoyとKhanna[2]のアルゴリズムは一般のケースよりも良い近似比 $O(r_{\max}^2 \log |V|)$ を達成することが示されているが，Nutov[13]はこれをさらに改善して $O(r_{\max} \log r_{\max})$ 近似アルゴリズムを与えている．Nutov[13]のアルゴリズムは点連結ネットワーク設計問題を，ChuzhoyとKhanna[2]のように要素連結ネットワーク問題に分解するのではなく，歪優モジュラ集合対関数被覆問題に分解している．ただし，このときの集合対関数は値として0か1をとる関数であり，その被覆問題については反復丸め法ではなく主双対法を用いても2近似アルゴリズムが得られるので，彼の結果は反復丸め法を用いなくても得られる．

4. おわりに

本稿ではネットワーク設計問題の分野でも最も基本的なサバイバルネットワーク設計問題に対する反復丸め法について簡単に紹介した．

反復丸め法に関する最近の重要な進展の一つに，次数制約付きネットワーク設計問題への応用がある．この問題では制約として，連結度の要求だけではなく，各節点の次数（接続している辺の本数）の上下限が与えられている．この問題のうち連結度要求が1のとき（つまり次数制約付き全域木問題）については，Goemansによって20年近く前に立てられた予想があったのだが，これは2007年にSinghとLau[14]によって反復丸め法を用いて解決された．彼らの結果が呼び水となり，様々なタイプの次数制約付きネットワーク設計問題に反復丸め法が応用されている[1][8][10][11]．著者自身も，重み次数制約付きネットワーク設計問題について反復丸め法の研究を行った[5]．

また，この分野の主導的な研究者の一人であるRavi教授（カーネギーメロン大学）は，2008年に京都大学の数理解析研究所に滞在の折，反復丸め法に関する連続講義を行った．そこでは上記のような最近の進展の解説とともに，これまで組合せ最適化の分野で反復丸め法とは別の方法で得られてきた様々な重要な結果が，反復丸め法を用いて証明できることが紹介された．講義の内容はSingh, Lau両氏との共著の書籍としてまとめられ，近々刊行予定と聞いているので，

興味を持たれた方はぜひ手にとっていただきたい．

ネットワーク設計問題については，まだまだ多くの基本的な課題が残されている．その一つは，3節で述べた点連結ネットワーク問題についての予想であろう．また辺連結ネットワーク問題についても，2節で触れたように現在反復丸め法によって2近似アルゴリズムが与えられているが，さらに良い近似比を達成できる可能性も残されている．これらの課題が反復丸め法や主双対法のような既存の手法の発展によって解決されるのか，まったく新しい方法によって解決されるのかは分からないが，いずれにしてもその過程で得られたアイデアは反復丸め法がそうであったように組合せ最適化の分野の至る所で応用可能なものになるだろう．私自身もそこに多少なりとも貢献できればと夢見る毎日である．

参考文献

[1] N. Bansal, R. Khandekar and V. Nagarajan, Additive guarantees for degree-bounded directed network design, SIAM Journal on Computing 39: 1413-1431, 2009.

[2] J. Chuzhoy and S. Khanna, An $O(k^3 \log n)$-approximation algorithms for vertex-connectivity network design, FOCS, 437-441, 2009.

[3] T. Chakraborty, J. Chuzhoy and S. Khanna, Network Design for Vertex Connectivity, Proc. ACM Symposyum on Theory of Computing (STOC), 167-176, 2008.

[4] L. Fleischer, K. Jain and D. P. Williamson, Iterative rounding 2-approximation algorithms for minimum-cost vertex connectivity problems, Journal of Computer System Sciences 72: 838-867, 2006.

[5] T. Fukunaga and H. Nagamochi, Network design with weighted degree constraints, Discrete Optimization, 7: 246-255, 2010.

[6] M. X. Goemans and D. P. Williamson, A general approximation technique for constrained forest problems, SIAM Journal on Computing 24: 296-317, 1995.

[7] K. Jain, A factor 2 approximation algortihm for the generalized Steiner network problem, Combinatorica 1: 39-60, 2001.

[8] T. Király, L. C. Lau and M. Singh, Degree Bounded Matroids and Submodular Flows. IPCO 2008: 259-272, Lecture Notes in Computer Science 5035, Springer 2008.

[9] G. Kortsarz, R. Krauthgamer and J. R. Lee, Hardness of approximation for vertex-connectivity network design problems, SIAM Journal on Computing, 33(3): 704-720, 2004.

[10] L. C. Lau and M. Singh, Additive approximation for bounded degree survivable network design, Proceedings of the 40th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC) 2008: 759-768.

[11] Z. Nutov, Approximating directed weighted-degree constrained networks, Proceedings of 11th International Workshop, APPROX 2008, and 12th International Workshop RANDOM 2008, Lecture Notes in Computer Science vol. 5171 2008, 219-232.

[12] Z. Nutov, Approximating node-connectivity augmentation problems, APPROX 286-297, 2009.

[13] Z. Nutov, Approximating minimum-cost connectivity problems via uncrossable bifamilies, FOCS 417-426, 2009.

[14] M. Singh and L. C. Lau, Approximating minimum bounded degree spanning tress to within one of optimal, Proceedings of the 39th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 661-670, 2007.