GI/G/1型マルコフ連鎖における定常裾確率ベクトルの漸近解析

木村　達明
(京都大学大学院情報学研究科システム科学専攻　現所属・日本電信電話㈱)
指導教員　高橋　豊 教授

1. 序論

本論文ではGI/G/1型と呼ばれる2変数マルコフ連鎖の定常分布の裾漸近特性について調べる．多くのマルコフ型待ち行列モデルの定常系内客数分布や待ち時間分布は，GI/G/1型マルコフ連鎖の定常分布に帰着できる．しかしながら，GI/G/1型マルコフ連鎖の定常分布の陽表現を一般的に得ることは難しく，行列解析法に基づいて数値計算を行うにしても実装上解決すべき問題は少なくない．加えて，系内客数や待ち時間が非常に大きくなるといった稀少事象確率はシステムの設計・性能評価に有用であるにもかかわらず，計算機シミュレーションでは精度の高い計算結果を得るのが困難である．こうしたことから，GI/G/1型マルコフ連鎖の定常分布の裾漸近特性に関する研究が近年盛んに行われている．

本研究の概要および関連研究を述べるために，GI/G/1型マルコフ連鎖の定義を与える．GI/G/1型マルコフ連鎖は特殊な遷移構造を持つ2変数マルコフ連鎖$\{(X_n, S_n);\ n=0,1,\cdots\}$である．第1変数$X_n$は非負の整数値を取り，レベルと呼ばれる．一方，第2変数S_nはフェーズと呼ばれ，

$$S_n \in \{1,2,\cdots,M_0\},\quad X_n=0,$$
$$S_n \in \{1,2,\cdots,M\},\quad X_n\geq 1.$$

となる．ここで，マルコフ連鎖$\{(X_n, S_n)\}$の状態を辞書式順序で並べた時の遷移確率行列を$\boldsymbol{T}$とすると，

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}(0) & \boldsymbol{B}(1) & \boldsymbol{B}(2) & \boldsymbol{B}(3) & \cdots \\ \boldsymbol{B}(-1) & \boldsymbol{A}(0) & \boldsymbol{A}(1) & \boldsymbol{A}(2) & \cdots \\ \boldsymbol{B}(-2) & \boldsymbol{A}(-1) & \boldsymbol{A}(0) & \boldsymbol{A}(1) & \cdots \\ \boldsymbol{B}(-3) & \boldsymbol{A}(-2) & \boldsymbol{A}(-1) & \boldsymbol{A}(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{A}(k)$ $(k\in\{0,\pm1,\pm2,\cdots\})$は$M\times M$行列，$\boldsymbol{B}(0)$は$M_0\times M_0$行列，$\boldsymbol{B}(k)$ $(k=1,2,\cdots)$は$M_0\times M$行列，そして，$\boldsymbol{B}(k)$ $(k=-1,-2,\cdots)$は$M\times M_0$行列である．

本論文では以下の安定条件を仮定する．

仮定1（安定条件） (a)遷移確率行列$\boldsymbol{T}$は規約である．(b)$\boldsymbol{A}\triangleq\sum_{k=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{A}(k)$は規約かつ確率的である．(c)$\boldsymbol{\pi}$を$\boldsymbol{A}$の定常確率ベクトルとするとき，$\sigma\triangleq\boldsymbol{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{e}<0$．(d)$\boldsymbol{\beta}_B\triangleq\sum_{k=1}^{\infty}k\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{e}<\infty$．

仮定1の下で，GI/G/1型マルコフ連鎖$\{(X_n, S_n)\}$は正再帰的となり，唯一の定常分布ベクトルを持つことが知られている．よって，$\boldsymbol{x}$を$\boldsymbol{T}$の定常分布ベクトルとし，$\boldsymbol{x}(k)$ $(k=0,1,\cdots)$をレベルkに相当する$\boldsymbol{x}$の部分ベクトルとする．なお，$\boldsymbol{x}(k)$の第j番目の成分は

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}\mathbb{1}(X_n=k,\ S_n=j),$$

を表す．ただし，$\mathbb{1}(\chi)$は事象χの指示関数とする．さらに，$\bar{\boldsymbol{x}}(k)=\sum_{l=k+1}^{\infty}\boldsymbol{x}(l)$ $(k=0,1,\cdots)$とおき，これを定常裾確率ベクトルと呼ぶ．本論文ではこの定常裾確率ベクトルの漸近特性について，裾が軽い (light-tailed) 場合と裾が重い (heavy-tailed) 場合を考える．

裾が軽い場合については多くの先行研究がある．$\hat{\boldsymbol{A}}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}z^k\boldsymbol{A}(k)$とし，その絶対値最大の固有値のうち偏角最小のものを$\delta(z)$とすると，$\delta(\theta)=1$をみたす$\theta>1$が存在するとき，$\bar{\boldsymbol{x}}(k)$は十分大きいkにおいて，率$1/\theta$で幾何的に減衰することが知られている．また，そのようなθが存在するとき，一般にはある自然数τに対して，$z=\theta e^{2\pi\sqrt{-1}\,n/\tau}$ $(n=0,1,\cdots,\tau-1)$が方程式$\delta(z)=1$の解となる．解析を簡単にするため，ほとんどすべての先行研究で$\tau=1$を仮定しているが，Kimuraら[1]はM/G/1型マルコフ連鎖に対して，τの値によらない統一的な漸近公式を導出した．本論文では，Kimuraら[1]の結果をGI/G/1型マルコフ連鎖に拡張する．

一方，裾が重い場合については先行研究が少なく，かつ主要な先行研究である文献[2]には誤りが散見される．Masuyama[3]は文献[2]で示された漸近公式の誤りを指摘するとともに，M/G/1型マルコフ連鎖の定常裾確率ベクトルが劣指数的に減衰するための最も緩い条件を提示した．この結果をGI/G/1型へ完全に一般化するにはいくつかの技術的な問題があるが，

本論文ではそうした問題の大半を解決することができた．さらに，文献[2]で示された結果に対して，文献[3]では言及されていない新たな誤りを発見したので，それについても言及する．

2. 準備

ここでは，本論文の主要結果を記述するためにいくつかの定義を与える．$\Phi(0)$, $\boldsymbol{G}(k)(k=1,2,\cdots)$ を $M\times M$ 行列とし，その (i,j) 成分はそれぞれ

$$\Pr[L_{\varphi(m)}=m,\ S_{\varphi(m)}=j|L_0=m,\ S_0=i],$$
$$\Pr[L_{\varphi(k+m)}=m,\ S_{\varphi(k+m)}=j|L_0=k+m,\ S_0=i],$$

を表すものとする．ただし，m は任意に固定された自然数であり，$\varphi(m)=\inf\{n>0;\ L_n\le m\}(k=0,1,\cdots)$ とする．さらに，$\boldsymbol{R}_0(k)$ および $\boldsymbol{R}(k)(k=1,2,\cdots)$ をそれぞれ $M_0\times M$, $M\times M$ 行列とし，その (i,j) 成分は

$$\mathrm{E}_{(0,i)}\left[\sum_{n=1}^{\varphi(k-1)}\mathbb{1}(L_n=k,\ S_n=j)\right],$$
$$\mathrm{E}_{(m,i)}\left[\sum_{n=1}^{\varphi(k+m-1)}\mathbb{1}(L_n=k+m,\ S_n=j)\right],$$

を表すものとする．ただし，$\mathrm{E}_{(m,i)}$ は $\{L_0=m,\ S_0=i\}$ で条件付けられた期待値を表す．ここで，$\hat{\boldsymbol{x}}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}z^k\boldsymbol{x}(k)$, $\hat{\boldsymbol{R}}_0(z)=\sum_{k=1}^{\infty}z^k\boldsymbol{R}_0(k)$, $\hat{\boldsymbol{R}}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}z^k\boldsymbol{R}(k)$, $\hat{\boldsymbol{G}}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}z^{-k}\boldsymbol{G}(k)$ とおくと，次式が成立する．

$$\hat{\boldsymbol{x}}(z)=\boldsymbol{x}(0)\hat{\boldsymbol{R}}_0(z)(I-\hat{\boldsymbol{R}}(z))^{-1},$$
$$\boldsymbol{I}-\hat{A}(z)=(\boldsymbol{I}-\hat{R}(z))(\boldsymbol{I}-\Phi(0))(\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{G}}(z)).$$

最後に，$\boldsymbol{\mu}(z)$, $\boldsymbol{v}(z)$ をそれぞれ $\hat{A}(z)$ の固有値 $\delta(z)$ に対応する左および右固有ベクトルとする．ただし，$\boldsymbol{\mu}(z)\boldsymbol{v}(z)=1$ とする．

3. 主要な結果

3.1 裾が軽い場合

定理 1 $\sum_{k=1}^{\infty}z^k\boldsymbol{A}(k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}z^k\boldsymbol{B}(k)$ の収束半径 r_{A_+}, r_B が共に厳密に 1 より大きいとする．このとき，仮定 1 が成り立ち，$\delta(\theta)=1$ かつ $1<\theta<r_B$ をみたす θ が存在するとき，$l=0,1,\cdots,\tau-1$ に対して次式を得る．

$$\lim_{n\to\infty}\theta^{n\tau+l}\bar{\boldsymbol{x}}(n\tau+l)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\tau-1}\frac{1}{(\omega_\tau^\nu)^l}\frac{\boldsymbol{x}(0)\hat{\boldsymbol{R}}_0(\theta\omega_\tau^\nu)\boldsymbol{g}(\theta\omega_\tau^\nu)}{\theta(\theta\omega_\tau^\nu-1)(\mathrm{d}/\mathrm{d}y)\delta(y)|_{y=\theta}}\boldsymbol{\mu}(\theta\omega_\tau^\nu)>\boldsymbol{0}.$$

ただし，$\boldsymbol{g}(\theta\omega_\tau^\nu)=(\boldsymbol{I}-\Phi(0))(\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{G}}(\theta\omega_\tau^\nu))\boldsymbol{v}(\omega_\tau^\nu)$, $\omega_x=e^{2\pi\sqrt{-1}/x}(x\ge1)$.

定理 1 は，定常裾確率ベクトル $\{\bar{\boldsymbol{x}}(k)\}$ が幾何的に減衰するとき，一般には周期が発現することを示している．しかし，その周期は τ であるとは限らない．幾何減衰の周期は $\{\bar{\boldsymbol{x}}(k)\}$ の z 変換の絶対値最小かつ次数が最大となる極の個数と一致し，それが τ の約数となることは容易に示すことができるが，さらに踏み込んだ議論を一般的な枠組みで展開するのは困難である．

3.2 裾が重い場合

仮定 2 以下の(a), (b)をみたす**裾が長い**離散型非負確率変数 Y が存在する．(a)$0<\mathrm{E}[Y]<\infty$, かつ(b)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\bar{\boldsymbol{A}}(k)}{\Pr[Y>k]}=\frac{\boldsymbol{C}_A}{\mathrm{E}[Y]},\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\bar{\boldsymbol{B}}(k)}{\Pr[Y>k]}=\frac{\boldsymbol{C}_B}{\mathrm{E}[Y]}.$$

ただし，$\boldsymbol{C}_A$, $\boldsymbol{C}_B$ はそれぞれ，$M\times M$, $M_0\times M$ 非負行列であり，$\boldsymbol{C}_A\ne\boldsymbol{O}$ あるいは $\boldsymbol{C}_B\ne\boldsymbol{O}$ をみたす．

定理 2 仮定 1，2 が成り立ち，Y の離散型平衡確率変数 Y_e が劣指数的[3] (subexponential) ならば，次式が成り立つ．

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\bar{\boldsymbol{x}}(k)}{\Pr[Y_\mathrm{e}>k]}=\frac{\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{e}+\bar{\boldsymbol{x}}(0)\boldsymbol{C}_A\boldsymbol{e}}{-\sigma}\boldsymbol{\pi}. \tag{1}$$

定理 2 に対応する文献[3]の結果では，条件として $\{\bar{\boldsymbol{A}}(k)\}$, $\{\bar{\boldsymbol{B}}(k)\}$ 自身の裾ではなく，それらの右からある行列をかけたものの裾に関する条件が仮定されており，その意味では文献[3]は，定理 2 より緩い条件で M/G/1 型に対する漸近公式を導出している．しかし，本論文では，以下に示すように，$\tau=1$ の場合については，Y の裾が長いという条件を外すことができ，また，対応する文献[3]の結果を完全に拡張することができた．

仮定 3 以下の(a), (b)をみたす離散型非負確率変数 Y が存在する．(a)$0<\mathrm{E}[Y]<\infty$, かつ(b)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\bar{\boldsymbol{A}}(k)\boldsymbol{e}}{\Pr[Y>k]}=\frac{\boldsymbol{c}_A}{\mathrm{E}[Y]},\quad \lim_{k\to\infty}\frac{\bar{\boldsymbol{B}}(k)\boldsymbol{e}}{\Pr[Y>k]}=\frac{\boldsymbol{c}_B}{\mathrm{E}[Y]}.$$

ただし，$\boldsymbol{c}_A$, $\boldsymbol{c}_B$ は非負行ベクトルであり，$\boldsymbol{c}_A\ne\boldsymbol{0}$ あるいは $\boldsymbol{c}_B\ne\boldsymbol{0}$ をみたす．

定理 3 仮定 1, 3 および $\tau=1$ が成り立ち，Y の離散型平衡確率変数 Y_e が劣指数的ならば，次式が成り立つ．

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\bar{\boldsymbol{x}}(k)}{\Pr[Y_e>k]}=\frac{\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{c}_B+\bar{\boldsymbol{x}}(0)\boldsymbol{c}_A}{-\sigma}\boldsymbol{\pi}. \tag{2}$$

参考文献

[1] Kimura, T., Daikoku, K., Masuyama, H. and Takahashi, Y. (2010). Light-tailed asymptotics of stationary tail probability vectors of Markov chains of M/G/1 type. *Stochastic Models*, **26**, 482-509.

[2] Li, Q.-L. and Zhao, Y. Q. (2005). Heavy-tailed asymptotics of stationary probability vectors of Markov chains of GI/G/1 type. *Advances in Applied Probability* **37**, 482-509.

[3] Masuyama, H. (2010). Subexponential asymptotics of stationary tail probability vectors of Markov chains of M/G/1 type. Resubmitted to European Journal of Operational Research for further review, October 3, 2010.