最小費用全域木ゲーム

岡本　吉央

組合せ最適化と協力ゲーム理論の境界に「組合せ最適化ゲーム理論」という分野がある．これは，特性関数形ゲームにおける特性関数が，ある組合せ最適化問題の最適値として定められる場合を考察するものである．その中で最も古典的なものの1つが，Bird[2]によって提案された最小費用全域木ゲームである．組合せ最適化ゲーム理論については，Curielの本[3]に初期の結果が多く掲載されている．また，日本語では毛利[9]，毛利と岡本[10]による短い解説がある．

1. 定義

有限集合Nと$o \notin N$を満たすoを考える．集合$N \cup \{o\}$の任意の2要素i, jに対して，重み$w(i, j)$が与えられているとする．ただし，$w(i, j)=w(j, i)$という対称性は満たすものとする．これは頂点集合を$N \cup \{o\}$とする無向完全グラフの各辺$\{i, j\}$に重み$w(i, j)$が与えられているものと考えることができる．そのような完全グラフの最小重み全域木を考えるが，重みを費用であると見なして，最小費用全域木と呼ぶことにする．

この状況における最小費用全域木ゲームとはNと関数$c: 2^N \to \mathbb{R}$の組(N, c)で，任意の$S \subseteq N$に対して，$c(S)$は$S \cup \{o\}$上に制限したグラフの最小費用全域木の費用であるとしたものである．関数cはこの最小費用全域木ゲームの特性関数と呼ばれる．

協力ゲームに慣れている方に対する注意となるが，このように定義された協力ゲームの特性関数cは費用を表すため，通常の協力ゲームの特性関数が利潤を表すことと異なる意味を持っている．そのため，意味を合わせるため，通常の協力ゲーム理論に現れる諸概念を定義し直す必要がある．または，十分大きなある値Mに対して$c'(S)=M-c(S)$と関数値を置き換えることで，(N, c')は通常の協力ゲームになり，こちらを考えることで同一の理論を形成することができる．

協力ゲーム理論の話題の1つに費用分担問題へのアプローチがある．最小費用全域木ゲームにおいては以下の設定になる．集合Nの各要素がoに接続するようなネットワークを構築するとき，その費用を最小にするものは最小全域木となる．この最小全域木の費用をどのようにNの要素間に振り分けると「公平」だと考えられるだろうか？　最小全域木の費用は上の記法を用いれば$c(N)$と書ける．各要素$i \in N$が分担する費用をx_iと書けば，$\sum_{i \in N} x_i = c(N)$という条件を満たすべきである．この等式を満たすベクトル$(x_i | i \in N)$を協力ゲーム理論では準配分と呼んでいる．どのような準配分が「公平」あるいは「安定」であると考えられるか，という問題について，協力ゲーム理論では様々な準配分が提案されていて，それらを協力ゲームの解と呼んでいる．

2. 解の性質

解として最も古いものの1つにコアがある．最小費用全域木ゲーム(N, c)のコアとは

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, \sum_{i \in N} x_i = c(N), \sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \, \forall S \leq N\right\}$$

という集合のことである．

コアは性質のよい集合である．例えば，コアは必ず有界な凸多面体となる．しかし，定義を見ただけではそれが空集合であるかどうか分からない．もし空集合であるとすると，望ましい準配分が存在しないこととなり，実際の状況に適用することができなくなる．

しかし，Bird[2]の定義した次の準配分は必ずコアの要素になるということが知られている[7]．まず，最小費用全域木Tを任意に選び，oを根とする根付き木であると見なす．すなわち，任意の頂点$i \in N$に対して唯一の親$p(i) \in N \cup \{o\}$が存在する．このとき，$\{i, p(i)\}$はTに属する辺であり，Birdの準配分では$x_i = w(i, p(i))$とするのである．

おかもと　よしお
北陸先端科学技術大学院大学
〒923-1292 能美市旭台1-1

Birdの準配分によってコアが非空であることは分かるが，Bird分担はコアの端点になっているため，ある意味で極端な費用分担を提示していることになる．感覚的な表現になるが，コアの中央付近にある分担の方が望ましく思える．そのためには，「与えられたベクトル$(x_i|i \in N)$がコアに属するか？」という問題が効率よく解けると都合がよい．しかし，このコア所属性判定問題はNP困難であることが知られている[4]．

このNP困難性は最小費用全域木ゲームのコアという凸多面体がよい面構造を有していないということを意味している．特に，最小費用全域木ゲームのコア上での凸最適化問題が効率よく解けそうもないということを示唆している．そのような凸最適化問題の1つが仁の計算である．仁の定義についてはゲーム理論の教科書に譲るが，最小費用全域木ゲームの仁の計算はNP困難であることが知られている[5]．

他の解概念はどうだろうか？　有名な解概念にShapley値がある．これはコアの要素であるとは限らないが，直観的に理解しやすい概念である．また定義は教科書に譲るが，最近Ando[1]は最小費用全域木ゲームのShapley値計算の困難性を証明した．

これらの困難性は最小費用全域木ゲームという対象の数学的構造がそれほどきれいではないことを私たちに伝えている．

3. シュタイナー木ゲーム

特性関数値$c(S)$を定義する際に，最小費用全域木ゲームでは$S \cup \{o\}$の頂点のみから構成される木を考えたが，Sがoに接続できれば，S以外の頂点の使用も許し，また，Nに属さない頂点の存在も許すという変種を考えることができる．そのような変更を加えて特性関数を定義したものは，シュタイナー木ゲームと呼ばれる[8]．特性関数値の計算がシュタイナー木問題となるからである．シュタイナー木ゲームのコアは空となることがあり[8]，コア非空性判定およびコア所属性判定がNP困難となることも知られている[6]．

参考文献

[1] K. Ando, Computation of the Shapley value of minimum cost spanning tree games: #P-hardness and polynomial cases, RIMS Preprint No. 1690, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2010.

[2] C. Bird, On cost allocation for a spanning tree: a game theoretic approach, Networks **6** (1976) 335-350.

[3] I. .J Curiel, Cooperative Game Theory and Applications: Cooperative Games Arising from Combinatorial Optimization Problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[4] U. Faigle, W. Kern, S. P. Fekete and W. Hochstättler, On the complexity of testing membership in the core of minimum-cost spanning tree games, International Journal of Game Theory **26** (1997) 361-366.

[5] U. Faigle, W. Kern and J. Kuipers, Computing the nucleolus of min-cost spanning tree games is NP-hard, International Journal of Game Theory **27** (1998) 443-450.

[6] Q. Fang, M. Cai and X. Deng, Total balancedness condition for Steinter tree games, Discrete Applied Mathematics **127** (2003) 555-563.

[7] D. Granot and G. Huberman, On minimum cost spanning tree games, Mathematical Programming **21** (1981) 1-18.

[8] N. Megiddo, Cost allocation for Steiner trees, Networks **8** (1978) 1-6.

[9] 毛利裕昭, 解説 離散最適化とその応用 第3回 離散最適化と協力ゲーム (1), オペレーションズ・リサーチ **48** (2003) 36-41.

[10] 毛利裕昭, 岡本吉央, 解説 離散最適化とその応用 第4回 離散最適化と協力ゲーム (2), オペレーションズ・リサーチ **48** (2003) 114-120.