社会選択理論

梅澤　正史

社会選択理論（social choice theory）は，個人が持つ選好から社会の選好を求める問題に対して，社会的決定ルールはどのようなものが望ましいか，またはどのような性質を持っているのか等を議論する理論体系である．集合的選択理論や，社会的選択理論ともいわれる．望ましい社会的制度や目的達成の可能性を研究する分野であるメカニズムデザイン理論と密接に関連がある．

1. はじめに

一般に，社会選択理論は以下のような集合的選択問題を扱う．選択肢の集合が与えられ，各個人がこの選択肢に対して様々な選好を持っている状況下で，それを集計するような社会の選好を決めるにはどうしたら良いのか，という問題である．選択肢としては，例えば，選挙における候補者，各種委員会での議案，個人間での資源配分やその財の量などが考えられるが，各個人が選好を持つものであれば何でも構わない．歴史的には，このような集合的選択に関する研究は少なくとも18世紀にまで遡ることができる．それらの中で有名なものとして，J. C. Borda（1781）による「ボルダルール」と，M. Condorcet（1785）による「コンドルセーのパラドックス」が挙げられる．前者は，各個人の選好順序で第1位とされた選択肢にある適当な数値を与え，第2位にはより小さな数値を与える，というようにして各選択肢に与えられた数値の合計点から勝者を決める社会選択ルールであり，これを原型とする集計ルールが各種選挙やコンクールの審査等でしばしば使用されている．後者は多数決の矛盾として知られており，ペアごとの多数決による総当たりが循環順序になりうることを示している．その後，このような集合的選択に対して，厚生経済学との関連の中で確固たる理論の礎を築いたのがケネス・アロー（Kenneth J. Arrow）である．以下では，アローの定理とその後の展開について述べる．

2. 一般可能性定理

選択肢の集合を $X(|X|=m)$，社会を構成する個人の集合を $N=\{1, \ldots, n\}$ としたとき，各個人 $i \in N$ が X 上に選好順序 $\succsim_i$ を持っており，以下を満たすものとする．すなわち，(i)反射性 $(\forall x \in X, x \succsim_i x)$，(ii)完備性（$\forall x, y \in X, x \succsim_i y$ または $y \succsim_i x$），(iii)推移性（$\forall x, y, z \in X, x \succsim_i y$ かつ $y \succsim_i z \Rightarrow x \succsim_i z$）を満たす．$X$ 上における全選好順序の集合を $\mathcal{R}$ とし，社会の選好を $\succsim \in \mathcal{R}$ で表す．選好順序 $\succsim \in \mathcal{R}$ の非対称部分を $\succ$ で表す．このとき，全個人の選好順序から社会の選好順序を与えるものを社会厚生関数（social welfare function）F という（$F: \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}$）．アローが提示した4つの公理は以下のものである．

公理1（個人選好の無制約性）　各個人は $\mathcal{R}$ 上のどのような選好順序を表明してもよい．

公理2（パレート最適性）　選択肢集合 X に属する任意の選択肢のペアについて，もしどの個人 i の選好も $x \succ_i y$ となっているならば，社会の選好も $x \succ y$ とならなければならない．

公理3（無関係選択肢からの独立性）　任意の選択肢のペア x, y について，どの個人 i も2つの選好組 $((\succsim_i)_{i \in N}, (\succsim'_i)_{i \in N})$ に関して選好順序が不変（$x \succsim_i y \Leftrightarrow x \succsim'_i y$）ならば，この2選択肢の社会的順序も不変でなければならない（$x \succsim y \Leftrightarrow x \succsim' y$）．

公理4（非独裁性）　常に自分の選好が社会の選好と同じになる（$\forall x, y \in X, x \succ_i y \Rightarrow x \succ y$）ような個人 i（独裁者）が存在してはならない．

Arrow[1]の中で“General Possibility Theorem”と記されている命題は以下のものである．

うめざわ　まさし
大東文化大学 経営学部企業システム学科
〒175-8571 板橋区高島平 1-9-1

[1] 文献によっては，「不可能性定理」と呼ばれている．

定理1（一般可能性定理[1]） 選択肢が3つ以上のとき，公理1～4を満たす社会厚生関数 F は存在しない．

アローの定理が民主的決定というものに対して多大な影響を与えたことは言うまでもない．公理の修正や別の公理の導入によって社会的選択の可能性を探る多くの研究が行われている．

3. 社会選択関数

前節で扱った社会厚生関数において，全個人の選好順序から社会の選好順序を与える，という要請は望みすぎであることが分かった．これに対し，唯一の最良な選択肢を選ぶルールはどうなのだろうか？ このような関数 f を社会選択関数（social choice function）という（$f: \mathcal{R}^N \to X$）．ところが，Gibbard[4] と Satterthwaite[6]が同時期に（全く独立に）この問題に対してまたしても否定的な結果を与えた[2]．そこでは以下の公理が導入された．

公理5（戦略的操作不可能性[3]） どの個人も社会選択の結果を自分がより好む結果に変えることができない（$\forall i \in N, f(\succsim_i, \succsim_{-i}) \succsim_i f(\succsim'_i, \succsim_{-i}), \forall \succsim_i \in \mathcal{R}, \forall \succsim'_i \in \mathcal{R}, \succsim_{-i} \in \mathcal{R}^{N \setminus \{i\}}$）．

公理6（独裁性） ある個人 i（独裁者）が存在し，i が最良とする選択肢が社会選択として常に選ばれる（$\forall x \in X, f((\succsim_i)_{i \in N}) \succsim_i x$）．

定理2（ギバード＝サタスウェイト定理） 値域が3以上であるとき，公理5を満たす社会選択関数 f は独裁的である．

ギバード＝サタスウェイト定理以後，様々な方法で社会選択関数の不可能性を解消または解明する試みが行われている．代表的なものは，個人選好を**単峰性選好**へ制限するものである．例えば選択肢が数値軸上に $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ のように与えられているとする．単峰性選好とは，各個人 i にとってその中で最良と思う選択肢（ピーク）a_{i^*} がただ1つ存在し，番号 j, j' が「$j < j' < i^*$ または $i^* < j' < j$」を満たすとき，個人 i の選好が $a_{i^*} \succ_i a_{j'} \succ_i a_j$ となっていることである．この選好下でMoulin[5]は一般中位選択関数を導入し，戦略的操作不可能な関数のクラスを特徴付けた[4]．一般中位関数とは，n 個ある個人のピークに，ランダムに選ばれた $n-1$ 個の数値軸上の点を加え，その $2n-1$ 個からなる点の中央値を選ぶものである．近年では，単峰性だけではなく選好の制限による不可能性解消のための研究も行われている．また逆に，選好をかなり制限しても独裁ルールしか得られないことも分かっており，この（逆の意味での）制限に関する研究結果も得られている（e.g., Aswal et al.[2]）．

4. 社会選択対応

社会選択において常に最良な選択肢を1つに絞ることは，場合によっては困難を伴う．この限定を緩和し，複数個選ぶことも許容する関数に対する研究も行われている．このような関数を社会選択対応と呼ぶ（$f: \mathcal{R}^N \to 2^X$）が，この関数は選択結果が複数個の選択肢からなるため，戦略的操作不可能性の定義が一意ではない．それぞれの定義から不可能性または可能性を論じる研究が行われている．しかし残念ながらこのような緩和を考えたところでやはり戦略的操作可能な結果となるケースが多いことも分かっている．

Barbera et al.[3]は，不可能性に対する肯定的な結果を導いた代表的な研究である．そこでは，経済学的に意味のある選好を与え戦略的操作不可能な社会選択ルールを導出している．

参考文献

[1] K. J Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York (1951) 2nd ed. 1963.

[2] N. Aswal, S. Chatterji and A. Sen, Dictatorial domains, *Economic Theory* (2003) 22: 45-62.

[3] S. Barberà, H. Sonnenschein and L. Zhou, Voting by committees, *Econometrica* (1991) 59: 595-609.

[4] A. Gibbard, Manipulation of voting schemes: a general result, *Econometrica* (1973) 41: 587-601.

[5] H. Moulin, On strategy-proofness and single-peakedness, *Public Choice* (1980) 35: 437-455.

[6] M. Satterthwaite, Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions, *J Econ Theory* (1975) 10: 187-217.

[2] 実際には，サタスウェイトは1973年に提出した博士論文の中でこのことを示している．

[3] "strategy-proofness"または"non-manipulability"という．"耐戦略性"とも訳される．

[4] 単峰性選好下での戦略的操作不可能な関数の存在は1940年代から知られていた（e.g., Black (1948)）．