数理計画と組合せ的行列理論

垣村　尚徳

組合せ的行列理論とその数理計画への応用を紹介する．組合せ的行列理論とは，行列の要素が零か非零かなどの組合せ的な情報を利用して解析を行う理論である．このような理論は工学に現れる大規模疎行列を扱う際に有用である．本稿では行列要素の符号に着目する定性的行列理論に焦点を当て，その線形計画と線形相補性問題への応用を述べる．

キーワード：線形計画問題，線形相補性問題，組合せ最適化

1. はじめに

行列に関する数値計算法は，最適化など OR の諸分野において必要となる基礎的な技術である．行列計算の手法は数多くあるが[19]，本稿では行列要素の正・負・零という符号情報に着目した組合せ的手法を取り上げる．このような手法は定性的行列理論と呼ばれ，1947 年に出版された Samuelson による経済学書 "*Foundations of Economic Analysis*"[18]が起源とされる．

定性的行列理論のように行列の構造的な情報を利用した手法は組合せ的行列理論と呼ばれ，工学分野に現れる大規模システムの解析に有用である．工学システムにおいて行列の係数が零か非零かなどといった構造的な情報は，大まかに言うとシステムの構成要素間の関係を表している．したがって，組合せ的行列理論を用いることで，構成要素間の依存関係などというシステムの組合せ構造を把握することができる．

また，構造的な情報に着目することはアルゴリズム設計の観点からも重要である．行列の数値的な情報を使って計算を行うと，丸め誤差など計算誤差が生じてしまうことは避けられない．それを防ぐために，できるだけ数値的な計算を行わずに，要素の正・負・零などといった非数値的な（構造的な）情報を活用する．行列の構造的な情報に対してグラフ・ネットワーク理論などの組合せ最適化技法を用いることで，計算誤差に対して安定で，かつ高速なアルゴリズムを設計できる．実際，化学プラントや集積回路などの大規模な工学システムを解析するために，マトロイド理論を利用した効率的なアルゴリズムが提案されている[14]．

本稿では，このような定性的行列理論の枠組みを数理計画問題へ拡張する．具体的には，数理計画に対して，係数の正・負・零という構造的な情報に着目し，組合せ最適化技法を用いた効率的なアルゴリズムを設計する．次節以降の構成は以下のとおりである．まず 2 節では，線形方程式に対してその係数の符号に着目する手法を紹介する．そしてその線形計画と線形相補性問題への応用を 3 節で述べる．3 節の内容は文献[5]および[6]の成果を概観したものである．これらの成果は，行列をグラフとして表現し，グラフ理論における関連研究を有効に利用することで得られたものである．4 節では，定性的行列理論の背後にあるグラフ理論について述べ，その近年の進展をまとめる．

2. 線形方程式の符号可解性

経済モデルで現れる線形方程式では，その係数要素の値を実際に求めることが困難であるが，一方でその符号は簡単に推測できる場合が多い．そこで，線形方程式の係数の正負のみに着目し，その可解性を解析する手法が提案されている．文献[18]で紹介された例を見てみよう．

例 1. 一商品の需要・供給モデルを考える．ここでは，商品の需要量と供給量は価格によって変化し，その市場価格は需要と供給の交わりから決まると仮定する（図 1 参照）．

このモデル上で，人々の嗜好を表す新しいパラメータ t を追加する．すなわち，t が大きくなると人々は商品をより望むようになり需要は上にシフトする．商品価格が p，嗜好が t であるときの供給量を $S(p)$，需要量を $D(p, t)$ とする．ここでの興味の対象は人々

かきむら　なおのり
東京大学 情報理工学系研究科
〒113-8656 文京区本郷 7-3-1

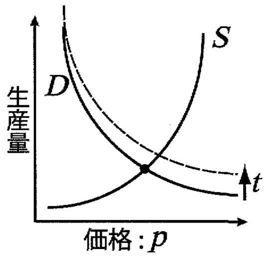

図1 需要・供給曲線

の嗜好の変化に伴う市場価格の変化である．

嗜好が t であるとき，$S(p)-x=0$ と $D(p,t)-x=0$ の解が市場価格と生産量の組 (p,x) を決める．上記2式の全微分が t の増加に伴う市場価格の変化を表す．

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial p} & -1 \\ \frac{\partial D}{\partial p} & -1 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial D}{\partial t} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

この線形方程式を解くことは実際上不可能である．なぜなら需要量・供給量を陽に表すことが困難であるため線形方程式の係数が正確に分からないからである．しかし一方，係数の符号は簡単に知ることができる．一般に価格が高くなれば供給量は増え需要は減る．よって $S(p)$ は p に関して単調増加関数であり，$D(p,t)$ は単調減少であると仮定できる．また $D(p,t)$ は t に関して単調増加であると仮定していた．したがって，

$$\frac{\partial S}{\partial p}>0, \quad \frac{\partial D}{\partial p}<0, \quad \frac{\partial D}{\partial t}>0$$

であり，(1)は

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & - \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \end{pmatrix}$$

と書ける．このように係数の正負のみが分かる状況下で線形方程式の解の情報を知ることが必要となる．□

実数 a の符号を $\mathrm{sgn}\, a \in \{+,0,-\}$ と表す．行列 A の符号パターン $\mathrm{sgn}\, A$ とは，各要素を符号で置き換えたものである．行列 A と同じ符号パターンをもつ行列全体の集合を $\mathcal{Q}(A)$ と書く，つまり $\mathcal{Q}(A)=\{\tilde{A} | \mathrm{sgn}\, \tilde{A}=\mathrm{sgn}\, A\}$ である．ベクトル x に対しても同様に $\mathcal{Q}(x)$ を定義する．

線形方程式 $Ax=b$ の符号パターンのみから定まる性質として符号可解性が定義されている．線形方程式 $Ax=b$ が符号可解であるとは，任意の $\tilde{A}\in\mathcal{Q}(A)$ と $\tilde{b}\in\mathcal{Q}(b)$ に対して，$\tilde{A}x=\tilde{b}$ が可解であり，その解が元の方程式 $Ax=b$ の解と同じ符号パターンをもつことをいう．

例2. 例1の(1)と同じ符号パターンをもつ線形方程式を考えよう：

$$\begin{pmatrix} +a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1 \end{pmatrix}.$$

ここで $a_1,\ldots,a_4$ と b_1 は正の数とする．この線形方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1a_4+a_2a_3}\begin{pmatrix} a_2b_1 \\ a_1b_1 \end{pmatrix}$$

と書ける．したがって，解の符号パターンは $a_1,\ldots,a_4$ と b_1 の大きさによらず，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}$$

である．このように(1)は符号可解である．よって例1では，需要・供給関数の具体的な値によらず，嗜好 t の増加によって (p,x) は右上方向に動く，つまり市場価格が上昇することが分かる．□

線形方程式 $Ax=b$ に対して，係数行列 A が長方行列の場合，符号可解性を判定する問題はcoNP完全である[10]．一方，A が正方行列の場合は，符号正則性と呼ばれる性質を判定することと本質的に等価である．正方行列 A が符号正則であるとは，$\mathcal{Q}(A)$ の任意の行列が正則であることをいう．例えば，例2の係数行列は符号正則である，なぜなら行列式が $-a_1a_4-a_2a_3=(-)+(-)<0$ と書けるからである．与えられた行列が符号正則かどうかを判定する問題は，Robertson-Seymour-Thomas[17]とMcCuaig[13]によって独立に，多項式で計算できることが示されている．

定性的行列理論の研究はBrualdi-Shader[1]やHall-Li[3]にまとめられている．近年，行列の符号パターンを用いてその固有値の正負を解析することが盛んに研究されている．この問題は動的システムの安定性解析にかかわりが深く生態学などに応用がある．特に対称行列に対して，その固有値の正・負・零の個数（符号数）が行列の符号パターンから一意に定まるための条件[4]や，その条件下で符号数を効率的に計算するアルゴリズムが提案されている[8]．

3. 数理計画への応用

3.1 線形計画問題

本節では，線形計画問題 $\mathrm{LP}(A,b,c)$：

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && cx \\ &\text{sub. to} && Ax=b, \\ &&& x\geq 0, \end{aligned}$$

を扱う．ここで A は $m\times n$ 行列，b は m 次縦ベクトル，c は n 次横ベクトルとする．線形計画は最も基本的な数理計画問題のひとつであり，単体法・内点法など効率的な解法が存在する．本節の目的は，定性的行列理論を利用して，与えられた A, b, c の符号パターンのみから最適解の符号がどのように定まるかを議論することである．さらに符号パターンを用いることで効率的な組合せ的解法を設計する．

線形計画 $\mathrm{LP}(A, b, c)$ に対して，$\mathcal{S}(A, b, c)$ を最適解の取りうる符号パターンの集合とする（実行不可能や非有界のときには $\mathcal{S}(A, b, c)$ は空集合とする）．線形計画 $\mathrm{LP}(A, b, c)$ が符号可解であるとは，任意の $\tilde{A}\in\mathcal{Q}(A)$，$\tilde{b}\in\mathcal{Q}(b)$，$\tilde{c}\in\mathcal{Q}(c)$ に対して，対応する最適解集合 $\mathcal{S}(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c})$ が $\mathcal{S}(A, b, c)$ と一致することをいう．以下に符号可解性を持つ線形計画の例を二つ挙げる．

例 3. 次のような 5 変数 2 制約の線形計画を考える：

$$\begin{aligned}\text{max.}\ & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -c_1 & -c_2\end{pmatrix} x\\ \text{s. t.}\ & \begin{pmatrix}a_1 & 0 & 0 & -a_2 & -a_3\\ 0 & a_4 & a_5 & -a_6 & 0\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix},\\ & x\geq 0.\end{aligned}$$

ここで $c_i(i=1,2)$，$a_i(i=1,\cdots,6)$，$b_i(i=1,2)$ はすべて正の数である．上の線形計画は単体法で生成される最適辞書と同じ符号パターンをしている．この最適解は次の 2 つの最適基底解の凸結合として書ける：

$$\begin{pmatrix}\frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_4} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top,\quad \begin{pmatrix}\frac{b_1}{a_1} & 0 & \frac{b_2}{a_5} & 0 & 0\end{pmatrix}^\top.$$

よって任意の $\tilde{A}\in\mathcal{Q}(A)$，$\tilde{b}\in\mathcal{Q}(b)$，$\tilde{c}\in\mathcal{Q}(c)$ に対して $\mathcal{S}(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c})=\{(+\ +\ 0\ 0\ 0)^\top, (+\ 0\ +\ 0\ 0)^\top, (+\ +\ +\ 0\ 0)^\top\}$ が成り立つ．このようにこの線形計画は符号可解である．□

例 4. 以下の線形計画を考える：

$$\begin{aligned}\text{max.}\ & \begin{pmatrix}0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & -c_2\end{pmatrix} x\\ \text{s. t.}\ & \begin{pmatrix}a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0\\ -a_3 & a_4 & 0 & a_5 & a_6 & 0\\ 0 & a_7 & -a_8 & 0 & -a_9 & -a_{10}\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}b_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\\ & x\geq 0.\end{aligned}$$

ここで $c_i(i=1,2)$，$a_i(i=1,\cdots,10)$，b_1 は正の数である．この線形計画は最適解をただひとつ持つ：

$$x=\frac{b_1}{a_1}\begin{pmatrix}1 & \frac{a_3}{a_4} & \frac{a_3a_7}{a_4a_8} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top.$$

よって任意の $\tilde{A}\in\mathcal{Q}(A)$，$\tilde{b}\in\mathcal{Q}(b)$，$\tilde{c}\in\mathcal{Q}(c)$ に対して $\mathcal{S}(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c})=\{(+\ +\ +\ 0\ 0\ 0)^\top\}$ であり，符号可解である．□

与えられた線形計画が符号可解かどうかを判定する問題は NP 困難である[5]．そこで，完全符号正則行列という概念を用いて，多項式時間判定可能な部分クラスを与える．$m\times n$ 行列 $(m\leq n)$ が完全符号正則であるとは，すべての m 次小行列が符号正則または恒等的に特異であることをいう．線形計画に対して，2 つの行列 $(A\ \ -b)$ と $\begin{pmatrix}-c\\ A\end{pmatrix}$ がともに完全符号正則であるとき，完全符号正則と呼ぶ．このとき次の定理が成り立つ．

定理 1（岩田・垣村[5]）．完全符号正則である線形計画は符号可解である．

例えば，例 4 の線形計画は完全符号正則である．一方，例 3 は完全符号正則ではない．

与えられた行列が完全符号正則かどうかを判定することは，正方行列の符号正則性を判定する問題に帰着でき，多項式時間で計算可能である[5]．よって定理 1 の条件は多項式時間で判定できる．完全符号正則行列に関しては 4.2 節で詳しく扱う．

次に符号可解な線形計画に対する効率的な解法について議論する．もし線形計画が符号可解ならば，最適解の符号パターンを多項式時間で計算可能である．実際，A, b, c の非零要素の大きさは最適解の符号パターンに影響しないので，すべての非零要素を 1 か -1 に置き換えた線形計画を 1 回解けば十分であり，内点法などを利用することで強多項式時間で計算できる．

文献[5]では，完全符号正則な線形計画に対して，符号パターンを利用することで，より効率的な組合せ的解法を設計した．この解法では，まず実行可能性判定と有界性判定を線形時間で行う．そして最適解を持つならば，再帰的に符号パターンを求めていくことで最適解の符号パターンを得る．各再帰では，完全符号正則行列に付随する二部グラフの組合せ的情報を利用して，グラフ上でパスを探索することで小さな問題に帰着している．アルゴリズム全体の計算時間は $\mathrm{O}(m\gamma)$ である（m は A の行数，γ は A, b, c の非零要素の総数）．このアルゴリズムは最適解の符号パターンだけではなく最適基底をも求めるので，アルゴリズム適用後にガウスの消去法を 1 回行うと最適解自身も計算できる．

定理 2（岩田・垣村[5]）．完全符号正則である線形計画は，$\mathrm{O}(m\gamma)$ 時間で最適解の符号パターンを計算できる．

3.2　線形相補性問題

線形相補性問題（LCP）は，

$$\begin{aligned}\mathrm{LCP}(A,b): \text{find} \quad & (w,z)\\ \text{s.t.} \quad & w=Az+b,\\ & w^{\mathrm{T}}z=0,\\ & w\geq 0,\ z\geq 0,\end{aligned}$$

という形で表される．ここで A は n 次正方行列，b は n 次ベクトルである．LCP は線形計画や凸二次計画を特殊な場合として含む記述力の高い数理計画問題である．LCP(A, b) の計算は一般に NP 困難であるが，行列 A が半正定値など特別な場合は多項式時間で計算できる．LCP に対する詳細は Cottle-Pang-Stone[2] や Murty[15] を参照されたい．

LCP に対して線形計画の場合と同様に符号可解性を定義する．LCP(A, b) に対して，$\mathcal{S}(A, b)$ を解の取りうる符号パターンの集合とする．LCP(A, b) が符号可解であるとは，任意の $\tilde{A}\in\mathcal{Q}(A)$ と $\tilde{b}\in\mathcal{Q}(b)$ に対して，$\mathcal{S}(\tilde{A}, \tilde{b})$ が $\mathcal{S}(A, b)$ と一致することをいう．

本稿では，行列 A の対角要素がすべて非零であるような LCP(A, b) を扱う．このような LCP を対角非零 LCP と呼ぶ．対角非零 LCP は，係数行列 A が正定値行列や P 行列・非退化行列である LCP を含んでおり，理論的に重要なクラスである[2, Chapter 3]．文献[6]では，対角非零 LCP の符号可解性に対する組合せ的特徴付けを与えている．具体的には，対角非零 LCP(A, b) が符号可解であるための必要十分条件が，行列 $(A\ \ b)$ のある特殊な小行列が完全符号正則であることを示した．さらに A と b の符号パターンのみから解の符号パターンを求める組合せ的な多項式時間解法を設計した．この解法で得られた解の符号パターンから簡単に解自体も得ることができることに注意すると，符号可解である対角非零 LCP は多項式時間計算可能な新しいクラスである．

定理 3（垣村[6]）．対角非零 LCP(A, b) の符号可解性は $O(n^2)$ 時間で判定できる．さらに，LCP(A, b) が符号可解ならば，その解の符号パターンを $O(\gamma)$ 時間（γ は A, b の非零要素数）で得ることができる．

4.　グラフ理論との関連

前節までの議論では線形方程式と数理計画の符号可解性を扱ってきたが，そこでは（完全）符号正則行列という概念が重要であった．本節では，これらの行列の背後にあるグラフ理論について説明する．

4.1　符号正則行列とパフィアン向き付け

与えられた正方行列が符号正則かどうかを判定する問題は，様々な組合せ的問題と多項式時間等価であり離散数学において重要な問題である．例えば 1913 年に Pólya が提起した問題[16]と等価である．Pólya の問題とは，(0, 1) 正方行列 A に対して A の要素 1 すべてに符号 +, − を上手く割り当てることで符号正則行列にできるかを判定する問題である．Pólya の問題の他にも，有向グラフにおいて偶数長の単純閉路を見つける問題などが正方行列の符号正則性判定問題と等価である．これらの問題に関するサーベイは文献[13][20]にある．

行列 A に対して二部グラフ $G(A)=(U, V; E)$ を以下のように定義する．頂点集合 U と V は A の行集合と列集合にそれぞれ対応する．辺集合 E は A の非零要素を表す，すなわち $E=\{(i, j)|a_{ij}\neq 0, i\in U, j\in V\}$ と定義する．(0, 1) 行列 A の非零要素に符号 +, − を割り当てることは，$G(A)$ の辺に対する向き付けと自然に対応する．二部グラフ G の向き付けがパフィアンであるとは，対応する $(0, \pm 1)$ 行列が符号正則であることをいう．このように，Pólya の問題は二部グラフがパフィアン向き付けを持つかどうかを判定する問題に言い換えることができる．

パフィアン向き付けは完全マッチングの総数を効率的に計算するために利用できる．二部グラフの完全マッチングの総数計算は一般に #P 完全であるが，もし二部グラフがパフィアン向き付けを持てば行列計算を用いて多項式時間で計算できる．これは統計物理分野へ応用があり文献[12]が詳しい．

二部グラフがパフィアン向き付けをもつための必要十分条件として，以下が知られている．ここでグラフ H が G のマッチングマイナーであるとは，G が H の偶細分 H' を部分グラフとして持ち，かつ $G-H'$ が完全マッチングをもつことをいう．

定理 3（Little[11]）．二部グラフ G がパフィアン向き付けをもつための必要十分条件は，$K_{3,3}$（左右の頂点数が 3 の完全二部グラフ）をマッチングマイナーとして含まないことである．

この事実からグラフが平面的ならばパフィアン向き付けを持つことになる．Robertson-Seymour-Thomas[17] と McCuaig[13] は，二部グラフ G がパフィアン向き付けを持つための必要十分条件が，G が平面的グラフと一種類の特別な非平面グラフの 2 種類からある特殊な操作を繰り返し用いて構成できるこ

とを示した．この構成定理から二部グラフがパフィアン向き付けを持つかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムを設計できる．

4.2 完全符号正則行列

3節で見たように，線形計画や線形相補性問題が符号可解であるための条件として完全符号正則行列が用いられていた．この行列はKim-Shader[9]によって導入された概念であり，符号正則性を長方行列へ拡張したものと見ることができる．

線形方程式 $Ax=b$ の解の取りうる符号パターンの集合を $\mathcal{S}(A,b)$ とする．このとき，行列 $(A\ \ b)$ が完全符号正則行列ならば，かつそのときに限り，任意の $\tilde{A}\in\mathcal{Q}(A)$ と $\tilde{b}\in\mathcal{Q}(b)$ に対して $\mathcal{S}(\tilde{A},\tilde{b})$ が $\mathcal{S}(A,b)$ と一致する[9]．下に例を挙げる．

例 5. 次の線形方程式 $Ax=b$ を考える：

$$\begin{pmatrix} +a_1 & -a_2 & 0 \\ -a_3 & -a_4 & +a_5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1 \end{pmatrix}.$$

ここで $a_1,\ldots,a_5$ と b_1 は正の数である．このとき解は $(a_2b_1/\alpha\ \ a_1b_1/\alpha\ \ 0)^\top$ と $(0\ \ 0\ \ -b_1/a_5)^\top$ ($\alpha=a_1a_4+a_2a_3>0$) のアフィン結合で書けるので，$\mathcal{S}(A,b)$ は5種の符号パターンを持つ：$(+\ +\ 0)^\top$，$(0\ 0\ -)^\top$，$(+\ +\ -)^\top$，$(+\ +\ +)^\top$，$(-\ -\ -)^\top$．このように解の符号パターンの集合が $a_1,\cdots,a_5$ と b_1 によらずに決まる．実際，行列 $(A\ \ b)$ は完全符号正則であることが確認できる． □

行列が正方行列の場合，完全符号正則性は符号正則性と等価である．ここから，Pólyaの問題の一般化として，$(0,1)$ 長方行列 A の要素に符号$+$, $-$を上手く割り当てることで完全符号正則にできるか判定する問題を考えることは自然であろう．この問題もパフィアン向き付けのように二部グラフ上で辺に向きを付ける問題として捉えることができる．

文献[7]では，この一般化されたPólyaの問題が，元々のPólyaの問題と同様の性質をさまざま持つことを示している．まず，この問題の計算複雑度がPólyaの問題と多項式時間で等価であり，多項式時間で計算できることを示した．さらに，この問題に対して，定理4と同様にマッチングマイナーによる特徴付けを与えた．

定理 5（垣村[7]）二部グラフ G が完全符号正則行列に対応する向き付けをもつための必要十分条件は，$K_{3,3}$，$K_{2,3}$，$L_{3,5}$ をマッチングマイナーとして含まないことである（図2，3参照）．

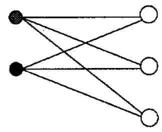

図2　二部グラフ $K_{2,3}$

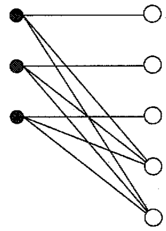

図3　二部グラフ $L_{3,5}$

参考文献

[1] R. A. Brualdi and B. L. Shader, *Matrices of Sign-Solvable Linear Systems*, Cambridge University Press, 1995.

[2] R. W. Cottle, J.-S. Pang and R. E. Stone, *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, 1992.

[3] F. J. Hall and Z. Li, Sign pattern matrices, *Handbook of Linear Algebra*, L. Hogben, ed., Chapman & Hall/CRC Press, 2007.

[4] F. J. Hall, Z. Li and D. Wang, Symmetric sign pattern matrices that require unique inertia, *Linear Algebra and Its Applications*, 338 (2001), 153-169.

[5] S. Iwata and N. Kakimura, Solving linear programs from sign patterns, *Mathematical Programming*, 114 (2008), 393-418.

[6] N. Kakimura, Sign-solvable linear complementarity problems, *Linear Algebra and Its Applications*, 429 (2008), 606-616.

[7] N. Kakimura, Matching structure of symmetric bipartite graphs and a generalization of Pólya's problem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 100 (2010), 650-670.

[8] N. Kakimura and S. Iwata, Computing the inertia from sign patterns, *Mathematical Programming*, 110 (2007), 229-244.

[9] S.-J. Kim and B. L. Shader, Linear systems with signed solutions, *Linear Algebra and Its Applications*, 313 (2000), 21-40.

[10] V. Klee, R. Ladner and R. Manber, Sign-solvability revisited, *Linear Algebra and Its Applications*, 59 (1984), 131-158.

[11] C. .H C. Little, A characterization of convertible (0,1)-matrices, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 18 (1975), 187-208.

[12] L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching Theory*, Annals of Discrete Mathematics 29, North-Holland, 1986.

[13] W. McCuaig, Pólya's permanent problem, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 11, R 79 (2004).

[14] K. Murota, *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, 2000.

[15] K. G. Murty, *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*, Internet Edition, 1997.

[16] G. Pólya, Aufgabe 424, *Archiv der Mathematik und Physik*, 20 (1913), 271.

[17] N. Robertson, P. D. Seymour and R. Thomas, Permanents, Pfaffian orientations, and even directed circuits, *Annals of Mathematics*, 150 (1999), 929-975.

[18] P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947; Atheneum, 1971.

[19] 杉原・室田, 線形計算の数理, 岩波書店, 2009.

[20] R. Thomas, A survey of Pfaffian orientations of graphs, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 3*, M. Sanz-Sole, J. Soria, J. L. Varona and J. Verdera, eds., 2006, 963-984.