多品種流問題に対する幾何学的アプローチ

小市　俊悟

最大重み多品種流問題は最大流問題の一般化であるが，整数枝容量であっても一般には整数最適解を持たない．しかし，フローが出入りする点の集合とその上の重みによっては整数最適解を持つ．そのため，どのようなときに整数最適解を持つのかについて長年研究されてきたが，最近になって，この疑問が解明された．その際に用いられた手法は，幾何学的な手法で，距離のタイトスパンやトロピカル多面体と呼ばれる幾何学的概念が重要な役割を果たす．特に，それらの幾何学的構造が最適解の構造を陽に表す．このような手法は，組合せ最適化の手法として例を見ないものであり，本稿では，それを紹介する．

キーワード：多品種流問題，タイトスパン，トロピカル多面体

1.　はじめに

本稿では，最大重み多品種流問題，特にその「整数性」を扱うが，なぜ多品種流問題を研究するのか，その背景から説明しよう．本稿で扱う線形計画問題はすべて，変数以外は整数であることを前提にする．

組合せ最適化問題の多くは整数計画問題として定式化できる．その整数制約を取り除けば，線形計画問題となる．このとき，一般には二つの問題の最適値は一致しない．しかし，組合せ最適化問題の中には，それらが一致するものがある．そのような性質を「整数性」と呼ぶことにしよう．整数性を持つ問題の代表例が最大流問題である．その整数性は最大流最小カット定理としてまとめられ，組合せ最適化において最も有名な最大最小定理のひとつとなっている．このような事実から最大流問題は特殊な線形計画問題であり，なぜ整数性を持つのかについて多くの研究がなされてきた．今日では，カット関数の劣モジュラ性や係数行列の完全単模性など，整数性を説明するための概念が整備され，整数性を持つ組合せ最適化問題の多くが，それらによって説明されている．しかし，整数性を持つ組合せ最適化問題の中には，既存の概念だけではその整数性が説明できない問題も残っている．どのような仕組みで整数性が生じるのか，この問いの答えを見つけることは，組合せ最適化における最重要課題のひとつである．

こいち　しゅんご
南山大学 情報理工学部
〒489-0863 瀬戸市せいれい町27

さて，多品種流問題の話に入ろう．最大重み多品種流問題は最大流問題の一般化である．最大流問題が始点sから終点tへフローを流す問題であったのを，多始点多終点にした問題が最大重み多品種流問題である．単純な拡張であるが，最大重み多品種流問題は一般には整数性を持たない．さらに興味深いことに，最大重み多品種流問題が整数性を持つのは，端点集合と呼ばれる，フローが出入りする頂点の集合Sと，その上の重みμ: $S\times S\to\mathbf{Z}_+$の組(S,μ)に依存する．ただし，重みは常に$\mu(s,s)=0(s\in S)$とする．最大流問題であれば，端点集合は$S=\{s,t\}$で，重みは$\mu=(s,t)=1$, $\mu(t,s)=0$とすればよい．最大流最小カット定理が成り立つように，この(S,μ)については整数性を持つ問題になる．ところが，端点集合は同じく$S=\{s,t\}$であっても，重みが$\mu(s,t)=\mu(t,s)=1$の場合，無向グラフであれば整数性を持つが，有向グラフの場合は整数性を持たない．このような観察から，次のような疑問が自然と湧いてくる．最大重み多品種流問題が整数性を持つような(S,μ)はどのような(S,μ)であるのか，そして，なぜ整数性を持つのか．

上述の疑問に対して，最近，平井広志氏[3][4]により，無向グラフの場合の整数性を持つ(S,μ)が解明された．さらに，平井広志氏と筆者の共同研究[5][6]により，有向グラフの場合についても解明された．整数性を解明する際に取られたアプローチは幾何学的なものであり，本稿では，それを紹介したい．少し補足しておくと，無向グラフの場合には，整数性を拡張して，1/2の整数倍という条件の有無で最適値が一致するかを考えた半整数性などが研究対象の中心となっている．また，有向グラフの場合，枝容量に整数条件以

外にEuler条件を課したものも考える．いずれの場合も，既存の結果を含みさらに拡張した結果が得られている．

2．整数性解明への道程

無向，有向グラフ，どちらの場合も，最大重み多品種流問題の整数性を解明するための最初のステップは，その双対問題の整数性を明らかにすることである．それは，双対問題が整数性を持つことが，主問題である最大重み多品種流問題が整数性を持つための必要条件だからである（ただし，完全双対整数性と同じような話なので，厳密に言うと主問題と双対問題の整数性は意味合いが若干異なる）．

このようなアプローチは，Karzanov[8][9]によって始められた．しかし，その手法は，ある制限のために行き詰まっていた．ところが，最近の研究で，その制限を取り除くことに成功し，最大重み多品種流問題の整数性解明に至った．Karzanovの手法を昇華させたとき，距離のタイトスパンと呼ばれる概念が双対問題の整数性解明に重要な役割を果たす．タイトスパンは多面体的複体であるが，その幾何学的構造が双対問題の整数性を陽に表す．この事実は，読者に新鮮な驚きを与えることになるであろう．さらに，枝容量にEuler条件を課した有向グラフの双対問題の場合，その整数性の解明にはトロピカル多面体なるものが必要となる．トロピカル多面体は，トロピカル幾何学と呼ばれるちょっと変わった幾何学における多面体で，多品種流問題とは関係なしに，最近10年ぐらいの研究で注目されてきた概念である．このような予想もしない他の研究とのつながりも多品種流問題の研究の醍醐味のひとつといえる．

本稿では，筆者も研究に携わった有向グラフにおける多品種流問題を中心に，その整数性について解説する．話の流れとしては，上でも述べたように，双対問題の整数性を明らかにすることが一つ目のステップとなる．双対問題は「距離」に関する最小化問題になり，さらに，距離のタイトスパン上の施設配置問題に書き換えられる．タイトスパン上の施設配置のために，最適解の構造はタイトスパンの幾何形状を反映し，それは双対問題の最適解に引き継がれる．結局，双対問題が整数性を持つ場合，双対問題の最適値はいくつかの最小カットの和になることが判明する．このような場合，edge splitting-offと呼ばれる既存の手法を利用することで，主問題である多品種流問題の整数性が得られる．紙面の都合上，細かい部分を省略することになるが，本稿を読んで多品種流問題の面白さを味わっていただけたら幸いである．

3．最大重み多品種流問題とその双対問題

まず，最大重み多品種流問題を線形計画問題として定式化する．頂点集合 VG と枝集合 EG を持つ有向グラフ $G=(VG, EG)$，端点集合 $S\subseteq V$，そして枝容量 $c: EG\to\mathbf{Z}_+$ からなる三つ組 $(G, S; c)$ をネットワークと呼ぶ．枝集合 $EG\subseteq VG\times VG$ について，$e\notin EG$ であれば，$c(e)=0$ とすることにして，以後は $EG=VG\times VG$ であると考える．S 中の相異なる端点を結ぶ G 中のパス $P\subseteq EG$ のことを S パスと呼び，S パス全体の集合を $\mathcal{P}$ と書く．S パス P の始点と終点を s_P と t_P で表す．最大重み多品種流問題とは，枝容量制約を守りながら各 S パス P に沿って流量 $\lambda(P)$ のフローを流すとき，総重み付き流量を最大化する問題

$$\begin{aligned}\text{max.}\quad & \sum_{P\in\mathcal{P}}\mu(s_P, t_P)\lambda(P)\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{P\in\mathcal{P}: e\in P}\lambda(P)\leq c(e)\ (e\in EG),\\ & \lambda(P)\geq 0\ (P\in\mathcal{P})\end{aligned}\tag{1}$$

である．また，その双対問題は，

$$\begin{aligned}\text{min.}\quad & \sum_{e\in EG}c(e)l(e)\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{e\in P}l(e)\geq\mu(s_P, t_P)\ (P\in\mathcal{P}),\\ & l(e)\geq 0\ (e\in EG)\end{aligned}\tag{2}$$

となる．

4．双対問題と距離

双対問題の整数性を解明する上で，「有向距離」と「有向メトリック」が必要となる．有限集合 V に対して，$V\times V$ から非負実数への関数で，$d(v, v)=0\ (v\in V)$ となるものを V 上の有向距離と呼ぶ．特に，これまでに出てきた重み μ は端点集合 S 上の有向距離とみなせる．次に，有向メトリックとは，V 上の有向距離 d であって，次のような「有向」三角不等式

$$d(u, v)+d(v, w)\geq d(u, w)\ (u, v, w\in V).\tag{3}$$

を満たすものをいう．

それでは，有向メトリックと双対問題の関係を解説しよう．双対問題(2)は非負変数についての最小化問題であるので，$l, l': EG\to\mathbf{R}_+$ について，$l\leq l'\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}l(e)\leq l'(e)\ (e\in EG)$ という順序において極小なものだけを考えれば十分である．実は，双対問題(2)の制約条件

を満たし，さらに極小なものは VG 上の有向メトリックとなることが知られている．これより，双対問題は次のような有向メトリックに関する最小化問題と等価である．

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{(u,v)\in EG} c(u,v)d(u,v) \\ \text{s.t.} \quad & d: VG\text{ 上の有向メトリック}, \\ & d(s,t) \geq \mu(s,t)\ (s,t\in S). \end{aligned} \tag{4}$$

5．有向距離のタイトスパン

この節では，有向距離のタイトスパンを紹介しよう．タイトスパンは，後に説明する性質が重要であって，その性質を持つものが，多面体的複体として実現されると理解するのがよいであろう．

今，μ を S 上の有向距離とする．集合 S のコピーを二つ用意し，それらを S^c，S^r とする．要素 $s\in S$ に対応する S^c と S^r の要素をそれぞれ s^c と s^r と書く．また，コピー S^c と S^r の和集合 $S^c\cup S^r$ を S^{cr} と書く．まず，次式で定義される多面体を Π_μ とする．

$$\{p\in\mathbf{R}^{S^{cr}} | p(s^c)+p(t^r)\geq\mu(s,t)\ (s,t\in S)\}.$$

次に，Π_μ の非負の点からなる多面体を P_μ とする．タイトスパン T_μ は，その多面体 P_μ の極小な点全体として定義される．ここで，点 $p\in P_\mu$ が極小であるとは，$q\leq p \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} q(u)\leq p(u)\ (u\in S^{cr})$ となる点 q が p 以外に P_μ にないことをいう．

タイトスパンが持つ重要な性質を述べよう．次式で定まる D_∞ は $\mathbf{R}^{S^{cr}}$ 上の有向メトリックである．

$$D_\infty(p,q)=\max\{\|(q^c-p^c)_+\|_\infty, \|(p^r-q^r)_+\|_\infty\}.$$

ここで，$(p)_+(u)=\max\{p(u),0\}(u\in S)$ である．重要な性質とは，下記のような性質を満たす写像 ϕ: $P_\mu\rightarrow T_\mu$ が存在することである．

(i) $p\in P_\mu$ に対して，$\phi(p)\leq p$．特に $p\in T_\mu$ に対して，$\phi(p)=p$．

(ii) $p,q\in P_\mu$ に対して，$D_\infty(\phi(p),\phi(q))\leq D_\infty(p,q)$．

性質(ii)にあるように，ϕ は D_∞ を拡大しない．このような写像を非拡大な写像と呼ぶ．

6．双対問題とタイトスパン

この節では，双対問題がタイトスパン上の施設配置問題に書き換えられることを説明する．少々突然ではあるが，次のような問題を考える．

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{(u,v)\in EG} c(u,v)D_\infty(\rho(u),\rho(v)) \\ \text{s.t.} \quad & \rho: VG\rightarrow P_\mu, \\ & (\rho(s))(s^c)=(\rho(s))(s^r)=0\ (s\in S). \end{aligned} \tag{5}$$

写像 ρ: $VG\rightarrow P_\mu$ を考えることは，VG の点を P_μ に配置することと解釈できるので，上記の問題は P_μ への施設配置問題とみなせる．

問題(5)が問題(4)と等価であることを説明しよう．$\mathbf{R}^{S^{cr}}$ 上の有向メトリック D_∞ を利用して，問題(5)の解 ρ から関数 d^ρ: $EG\rightarrow\mathbf{R}_+$ を $d^\rho(u,v)=D_\infty(\rho(u),\rho(v))\ (u,v\in VG)$ で定める．すると，d^ρ は VG 上の有向メトリックとなる．さらに，$s\in S$ に課された制約により，d^ρ は問題(4)の解となる．一方，問題(4)の解 d に対して，次式で定める ρ^d は VG から P_μ への写像となる．各 $v\in VG, s\in S$ に対して，

$$((\rho^d(v))(s^c),(\rho^d(v))(s^r))=(d(s,v),d(v,s)).$$

この写像 ρ^d は，$s\in S$ に対する制約も満たすので，問題(5)の解である．さらに，d は三角不等式(3)を満たすために，$D_\infty(\rho(u),\rho(v))\leq d(u,v)$ が言える．以上より，問題(5)は問題(4)と等価となる．

さらに，ここでタイトスパンが持つ性質を使うと，問題(5)の制約式における P_μ を T_μ に取り替えることができる．実際，$T_\mu\subseteq P_\mu$ であるから，その取り替えにより最適値は等しいか大きくなる．ところが，問題(5)の最適解 ρ に対して P_μ から T_μ への非拡大な写像 ϕ を適用した合成写像 $\phi\circ\rho$ を考えると，それは T_μ に取り替えた問題の解でありながら，ϕ の非拡大性から目的関数値は大きくならない．したがって，P_μ を T_μ に取り替えても最適値は変わらない．

7．双対問題の整数性

問題(5)の P_μ を T_μ に取り替えて得られるタイトスパン上の施設配置問題を，T-双対問題と呼ぶことにする．

ここで，整数性を持つ典型的な例である最大流問題の T-双対問題を見てみよう．最大流問題の場合，端点集合は $S=\{s,t\}$ で，重み μ は $\mu(s,t)=1, \mu(t,s)=0$ であった．そのタイトスパン T_μ は4次元空間に定義されるが，$\mathbf{R}$ 上の線分 $[0,1]$ に等長的に射影することができる．このとき有向メトリック D_∞ は，$p,q\in[0,1]$ に対して，$|(q-p)_+|$ で定めた有向メトリックに代替される．結局，最大流問題の T-双対問題は次のような問題となる．

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \sum_{(u,v)\in EG} c(u,v)|(\rho(v)-\rho(u))_+| \\ \text{s.t.} \quad & \rho: VG\rightarrow[0,1], \\ & \rho(s)=0, \rho(t)=1. \end{aligned} \tag{6}$$

次に，問題(6)がいわゆる最小カット問題と等価であ

ることを見る．今，ρ を問題(6)の解とし，さらに 3 点 $\rho(u)$，$\rho(v)$，$\rho(w)$ が線分 $[0,1]$ 上で $\rho(u)<\rho(v)<\rho(w)$ となるように隣合っているものとする．このとき，$\epsilon=\min\{\rho(w)-\rho(v), \rho(v)-\rho(u)\}$ を用いて $\rho^{\pm}$ をそれぞれ，v についてのみ $\rho^{\pm}(v)=\rho(v)\pm\epsilon$（複号同順）とし，その他の $u\in VG$ については ρ と等しいものと定める．すると，タイトスパンが線分 $[0,1]$ であることより，$d^{\rho}=(d^{\rho^+}+d^{\rho^-})/2$ が成り立つ．これを繰り返せば，d^{ρ} を VG から $\{0,1\}$ への写像であるような $\tilde{\rho}$ に対応する $d^{\tilde{\rho}}$ の凸結合で書くことができる．特に，ρ が最適解であれば，$\rho^{\pm}$ も最適解となるから，これは問題(6)に $\{0,1\}$ への写像であるような最適解が存在することを意味する．そのような最適解 ρ に対して，$(\{v\in VG|\rho(v)=0\}, \{v\in VG|\rho(v)=1\})$ とすれば，これは VG の st-カットである．さらに ρ の最適性より，それは VG の最小 st-カットに他ならない．

さて，今用いた論法は，タイトスパンの次元が 1 であれば適用可能である．というのも，次元が 1 であるようなタイトスパンはいくつかの線分からなるパスとなるからである．そのような T-双対問題の最適解 ρ として，各線分の端点への写像となるものを選べる．そのような最適解 ρ について，各線分は VG のカットを定める．特に最適性から，それらのカットはすべて最小カットとなる．このようにして，タイトスパンの次元が 1 以下である場合，双対問題は整数性を持ち，その最適値はタイトスパンの幾何学的構造から決まる最小カットの和となる．

ここで，次のような二つの疑問を抱くことは自然なことだろう．一つ目は，タイトスパンの次元が 1 以下になるような (S,μ) はどのような (S,μ) であるのか．二つ目は，タイトスパンの次元が 2 以上であれば，整数性を持つのか．どちらの疑問に対しても，既に答えを得ている．

一つ目については，タイトスパンの形状がその答えを教えてくれる．次元が 1 となるような (S,μ) は，$\mathbf{R}$ の閉区間からなる族 $\{I_s\}_{s\in S}$ が存在して，μ がそれら閉区間の最短距離になっているようなものである．ただし，その距離は，最大流問題のときに用いたもので測る．ちなみに，タイトスパンの次元が 1 以下になるかは，μ から構成される，ある二部グラフのマッチングを調べることで判定できる．

二つ目については，タイトスパンの次元が 2 以上である場合，双対問題は整数性を持たない．準備を要する話になるので割愛するが，この結果の方がむしろ重要であって，詳しくは文献[6]を読んでいただきたい．

8. Euler 条件付き枝容量

この節では，有向グラフ上の最大重み多品種流問題の場合，枝容量に Euler 条件を加えることで整数性を持つような (S,μ) があることに着目する．その例としては，Lomonosov（未出版）と Frank[2]が独立に発見した自由多品種流があり，全端点間の重みが 1 である場合に相当する．他にも，Ibaraki-Karzanov-Nagamochi[7]による例がある．結論としては，これらを統一的に説明し，さらに拡張する定理を得ている．この節では，それを簡単に説明する．

枝容量 $c: EG\to\mathbf{Z}_+$ について，点 $v\in VG$ に対する Euler 条件とは，v から出る枝の容量の総和と v に入る枝の容量の総和が等しいというものである．全点 VG が Euler 条件を満たす場合，枝容量 c は完全 Euler 的であるという．簡単のために，以後では，枝容量 c は完全 Euler 的であるとする．

完全 Euler 的な（整数）枝容量 c が，$c=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_{C_i}$ のように，閉路 $C_1,\cdots,C_m$ の特徴ベクトル $\chi_{C_1},\cdots,\chi_{C_m}$ の非負整数結合として表されることは，よく知られた事実である．これより，問題(4)の目的関数は，

$$\sum_{(u,v)\in EG}c(u,v)d(u,v)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i d(C_i) \tag{7}$$

と分解できる．ただし，$C\subseteq EG$ に対して，$d(C)=\sum_{xy\in C}d(x,y)$ である．この分解(7)により，完全 Euler 的な枝容量 c に対して，各閉路 C について，その閉路長 $d(C)$ を拡大しなければ，目的関数値は増加しないことがわかる．したがって，問題(4)の極小な解の中でも，さらに閉路長についても極小なものが重要となる．ここで，多品種流問題とトロピカル幾何学が予想もしないつながりを見せる．

9. 双対問題とトロピカル多面体

トロピカル多面体とは，トロピカル幾何学における多面体である[1]．本稿では，それを次のように定義する．前述の多面体 Π_μ の極小な点全体を Q_μ で表す．集合 Q_μ も多面体的複体であって，定義より $(\chi_{S^c}-\chi_{S^r})$ 方向の平行移動に関して不変である．そこで，Q_μ を商空間 $\mathbf{R}^{S^{cr}}/(\chi_{S^c}-\chi_{S^r})\mathbf{R}$ に射影した集合 $\overline{Q}_\mu$ を考える．こうして得られる集合 $\overline{Q}_\mu$ が，トロピカル多面体である．

トロピカル多面体とタイトスパンの関係であるが，集合 Q_μ の非負の点からなる集合を Q_μ^+ と表せば，そ

の定義より $Q_\mu^+ \subseteq T_\mu$ である．さらに，T_μ から Q_μ^+ に次のような性質を満たす写像 φ: $T_\mu \to Q_\mu^+$ が存在する．

(i) $p \in Q_\mu^+$ に対して，$\varphi(p)=p$.

(ii) T_μ の点からなる点列 $C=(p_1, \cdots, p_n)$ に対して，$D_\infty(\varphi(C)) \leq D_\infty(C)$.

ただし，$D_\infty(C)=\sum_{i=1}^{n-1} d(p_i, p_{i+1})+d(p_n, p_1)$ である．

ここで，問題(5)の P_μ を Q_μ^+ に取り替えた問題を考えよう．その問題を Q-双対問題と呼ぶことにする．問題(4)の解 d に対応する ρ^d に対して，非拡大な写像 ϕ: $P_\mu \to T_\mu$ と上述の閉路長非拡大な写像 φ: $T_\mu \to Q_\mu^+$ を用いて，合成写像 $\varphi \circ \phi \circ \rho^d$ を構成すれば，閉路長に関して非拡大なまま Q-双対問題の解となる．特に，d が閉路長に関して極小であれば，すべての閉路について，閉路長が保たれる．ゆえに，完全Euler的な枝容量 c に対して，双対問題と Q-双対問題の最適値は一致する．

実は，さらに取り替える集合を限定できる．いくつかステップを経るが，最終的には，我々がスリムなトロピカル多面体と呼ぶ集合 $\bar{Q}_\mu^{slim}$ にまで限定できる．そして，完全Euler的な枝容量の場合も，スリムなトロピカル多面体 $\bar{Q}_\mu^{slim}$ の次元が1以下であるとき，双対問題は整数性を持つ．次元が1のタイトスパンは線分からなるパスであったが，次元が1であるようなスリムなトロピカル多面体 $\bar{Q}_\mu^{slim}$ は少し複雑な構造となり，線分からなる木となる．このときも双対問題の最適値は，スリムなトロピカル多面体の幾何学的構造から決まる最小カットの和となる．

10. 多品種流問題の整数性

さて，ここまでは双対問題の整数性について解説してきたが，この節では，主問題である最大重み多品種流問題の整数性について論じたい．前節までの結果によれば，双対問題が整数性を持つ場合，その最適値はタイトスパンもしくはスリムなトロピカル多面体の幾何学的構造によって決まる最小カットの和となる．これより，総重み付き流量の最大値がそれらの幾何学的構造によって決まる最小カットの和に等しい．これは，ひとつの最大最小定理である．このような最大最小定理が得られると，edge splitting-off と呼ばれる操作を利用することで，主問題である最大重み多品種流問題にも整数最適解が存在することを示すことができる．この edge splitting-off という手法は，多品種流問題の研究においては標準的な手法である．

11. おわりに

本稿では，最大重み多品種流問題の整数性が，タイトスパンやトロピカル多面体といった幾何学的概念を利用して解明される過程を紹介した．タイトスパンやトロピカル多面体の幾何学的構造が双対問題の最適解の構造を陽に示している点は，他の組合せ最適化問題にはない（知られていない）面白さである．

参考文献

[1] M. Develin and B. Sturmfels, Tropical convexity, *Documenta Mathematica* **9** (2004), 1-27.

[2] A. Frank, On connectivity properties of Eulerian digraphs, In: *Graph theory in memory of G. A. Dirac* (Sandbjerg, 1985; L. Dœvling Andersen, I. Tafteberg Jakobsen, C. Thomassen, B. Toft, P. D. Vestergaad, eds.), North-Holland, Amsterdam (1989), 179-194.

[3] H. Hirai, Tight spans of distances and the dual fractionality of undirected multiflow problems, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **99** (2009), 843-868.

[4] H. Hirai, The maximum multiflow problems with bounded fractionality, RIMS-Preprint 1682 (2009).

[5] H. Hirai and S. Koichi, On tight spans and tropical polytopes for directed distances, Preprint (2010), arXiv: 1004.0415.

[6] H. Hirai and S. Koichi, On duality and fractionality of multicommodity flows in directed networks, Preprint (2010), arXiv: 1006.5520.

[7] T. Ibaraki, A. V. Karzanov and H. Nagamochi, A fast algorithm for finding a maximum free multiflow in an inner Eulerian network and some generalizations, *Combinatorica* **18** (1998), 61-83.

[8] A. V. Karzanov, Minimum 0-extensions of graph metrics, *European Journal of Combinatorics* **19** (1998), 71-101.

[9] A. V. Karzanov, Metrics with finite sets of primitive extensions, *Annals of Combinatorics* **2** (1998), 211-241.