金融市場に対する物理学的手法の適用とその成果

山田　健太，高安美佐子，高安　秀樹

株式市場や為替市場に代表される金融市場に対して物理学的アプローチを行う経済物理学の手法と研究成果を紹介する．高頻度データを解析した結果，時々刻々と変化する金融市場にも物質世界と同じように普遍的な統計性があることが分かってきた．また，近年の成果として，これらの統計性を定性的，さらには定量的に再現する時系列モデルやエージェントベースモデルについて述べる．最後に展望として応用領域や金融市場以外の経済物理学の話題を紹介する．

キーワード：経済物理学，確率過程，時系列解析，エージェントベースモデル

1．はじめに

経済物理学という言葉は15年ほど前に統計物理の国際会議で生まれた．物理学者が経済分野に進出したきっかけとしては，コンピュータの発達により株式市場や為替市場に代表される金融市場に対して，日時のデータではなく，秒単位さらにはミリ秒単位といった時間分解能の高いデータが手に入るようになり，統計的に十分な信頼がおける精度で解析が行えるようになった点が大きい．

詳細なデータに基づく定量的な観測は物理学には欠かせない手順であり，物理学の父とも呼ばれるガリレオは，自作の望遠鏡による木星の衛星，金星の満ち欠け，太陽の黒点の観測結果から，天動説が間違っていることを訴えた．良く知られているように，宗教上の理由から彼の理論は当時受け入れられなかったが，ニュートンの古典力学へとつながる．古典力学はボールの運動といった身近な現象から天体の運動といった非常に大きなスケールの運動までを正確に記述するが，10^{-10} m程度の原子スケールでの現象へは適用することができない．この小さなスケールにおける現象は，量子力学によって記述されるが，量子力学の出発点もやはり観測であった．

産業革命以降，鉄は国力の指標となるほど重要な物質であった．鉄は鉄鉱石とコークスを高炉に入れ，高温で熱することにより鉄鉱石から酸素を除去することで得られるが，このとき，高炉は非常に高温で普通の温度計では測ることができず，温度管理は職人の勘と経験を頼りに行われていたため，より効率的に鉄を作るためには誰もが簡単に温度を測る方法が必要であった．赤々と光った鉄が熱いことは，経験的にも分かるように，熱せられた物体が放つ色と温度の間には関係があり，この色（光のスペクトル）と温度の関係を理論的に説明するモデルが構築できれば，光のスペクトルを測ることにより温度を定量的に測定できたことになる．そこで，高炉から発せられる光のスペクトルを用いて測り，その分布を説明するモデルを構築しようと多くの物理学者が試みたが，古典力学を用いたモデルではどうしても説明することはできなかった．この問題を解決したのは量子論の父と呼ばれるプランクである．プランクは，このスペクトルを説明するために，エネルギーに最少単位を設定し，エネルギーの量子化（離散化）が必要であることを示した．そして，この量子論は，その後，原子スケールの現象にも適用されることが分かり量子力学へとつながる．

物理学の父がガリレオであり，量子論の父がプランクであるならば，経済物理学の父はマンデルブロといえるかもしれない．レビの安定分布の理論に影響を受けたマンデルブロは綿花の価格変動がベキ分布に従っていることを見いだしフラクタルのアイデアを得た．フラクタルの概念は自然界や物質からも数多く観測され，全体と部分が自己相似な構造を持つ様々な形や時系列に応用され，複雑系科学の研究へとつながった．また，かれは著書の中で金融工学によるデリバティブ

やまだ　けんた，たかやす　みさこ
東京工業大学 総合理工学研究科
〒226-8502 横浜市緑区長津田町4259
たかやす　ひでき
ソニーコンピュータサイエンス研究所
〒141-0022 品川区東五反田3-14-13

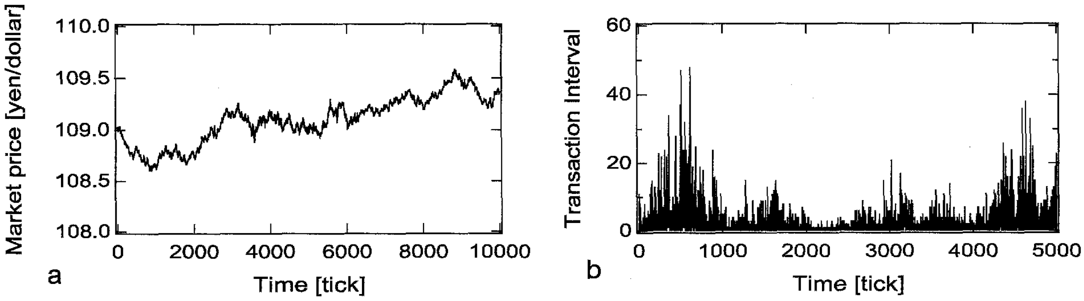

図1 a：10000ティック間の円ドル市場の価格変動．b：5000ティック間の取引間隔．取引が成立すると1つ進む時間の単位をティック[tick]と呼ぶ．

の行き過ぎに警笛を鳴らし，昨今の金融危機を警戒していた[1]．

近年では，さらに高頻度な金融市場データの解析が可能となり，価格変動の分布のベキ則やボラティリティーの長時間相関は市場や銘柄にかかわらず普遍的に観測されることが分かってきた．また，ベキ則や長時間相関といったキーワードは系の状態が急激に変化する臨界現象と関わりが深いため，さらに物理学者を引きつけ，近年もデータ解析やモデル化を中心に活発に研究が行われている[2]～[5]．

2. 経済物理学の成果

2.1 経験則の確立

本稿では金融市場に焦点を当ててこれまでの経済物理の研究成果を概説する．経済物理学と経済学や金融工学との違いは，現象に対するアプローチ方法である．経済学や金融工学では最初に人間の行動や価格変動のメカニズムに効用関数やブラウン運動などの仮定をおいてモデル化を行い，モデルの検証としてデータと比較する．昨今の金融危機は金融工学に対して，この比較が不十分であったことが，原因の一つであると考えられる．一方，経済物理学的手法では初めに秒単位やミリ秒単位の高頻度データを徹底的に解析することにより，解析対象から観測される普遍的な経験則を確立し，それらを再現するモデルを必要最小限の仮定とパラメータを用いてモデル化を行う．もし，観測される経験則を再現できるモデルが構築できれば，より高いレベルで現象の理解できたといえる．また，このモデルを用いて誰もが手軽にシミュレーションを行える実験場ができたことに相当し，金融市場の安定化などの応用が期待される．この物理の手法は，統計的に信頼できる高頻度のデータがあればその対象を問わない科学的な手法であり，ある分野で十分なデータが得られると物理化学や生物物理や経済物理を生み成功を収めている．○○物理という分野が多いのはこの適用範囲の広さと系の正確な記述による実用性の高さに由来する．

図1に示す外国為替市場や株式市場の価格変動や取引間隔から観測される統計的性質において重要で代表的なものを以下に示す．

- 為替市場の市場価格 $P(n)$ の価格差
$$\Delta P = P(n) - P(n-1) \tag{1}$$
の分布はベキ指数3程度のベキ分布に従う[6]～[8]．これは，正規分布を仮定したときにはほぼ起こりえない大きな変動が，実際には高い確率で起きていることを表す．
- 価格差 $\Delta P(n)$ の異時刻相関 $C(T)$ は1ティック目に負の相関をとる．これは，1ティック前の価格が上がった後は下がりやすく下がった後は上がりやすいことを意味している．しかし2ティック目以降は，ほとんど相関がない．この結果から価格変動の予測が不可能であるといわれることがしばしばある．価格差の絶対値（ボラティリティー）$|\Delta P(n)|$ には数週間から数カ月にわたる長時間相関がある[6][9]．これは，市場が荒れた場合に大きな変動が起こると続けて大きな変動が起こりやすいこと示唆している．
ここで，異時刻相関 $C(T)$ は
$$C(T) = \frac{\langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t+T) - \langle x \rangle) \rangle}{\sigma^2} \tag{2}$$
であり，$\langle x \rangle, \sigma^2$ はそれぞれ x の平均値と分散である．
- 以下で定義される
$$\sigma(k) = (\langle \{P(n+k) - P(n)\}^2 \rangle - \langle P(n+K) - P(n) \rangle^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$
価格の拡散は時刻が k 経過したとき，到達した価格の分布の標準偏差である．為替の価格においては小さな k の領域ではランダムウォーク時の通常拡散 $\sigma \propto T^{1/2}$ とは異なり，大きな領域で

はランダムウォークと同じ関係になる[10]．また，市場が荒れている際の時系列からは，通常拡散よりも速い拡散も観測される．

- 高安（美）らによって提案されたPUCK（Potentials of Unbalanced Complex Kinetics）モデルを用いた解析により，市場価格 $P(n)$ から市場価格中のポテンシャルを観測することができる．これは，市場価格のダイナミクスが確率的な効果だけでなく，動力学的な効果を含むことを意味する[11][12]．
- インターネットバブルやハンガリーのインフレ時など，価格変動が指数関数や2重指数関数またはベキ関数といった非常に強いトレンドを持つ関数型でよくフィッティングできる場合がある[13]～[16]．
- 取引間隔は発生確率が一定のときに見られるポアソン過程には従っておらず，過去の取引間隔に依存する非ポアソン的な過程に従っており，その分布は指数分布よりも広い裾野を持つ[17][18]．この非ポアソン性は，直感的にいうと市場で活発に取引が行われ，取引間隔が短くなりだすと，さらに市場が活発になり，より取引間隔が短くなる傾向があり，逆に市場が落ち着き，取引間隔が長くなり始めると，さらに長くなる傾向があることに起因する．

2.2 数理モデルの構築

これら金融市場における自明でない性質は，多くの市場から観測されることが分かってきた．次のステップとしてはこれらの現象を再現する数理モデルを構築することである．金融市場のモデルは大きく2つに分けることができる．一つは金融市場から観測される価格変動の時系列を直接モデル化する方法であり，もう一つは市場で取引を行うディーラーや集まってきた注文を表示する板情報の時間変化をモデル化する方法である．

金融市場の時系列に対して最初にモデル化を行ったのはフランスのバシェリエである．1900年にバシェリエは価格変動をランダムウォークの理論によって確率過程として記述した[19]．アインシュタインはその5年後にランダムウォークの理論をより厳密に定式化し，水面をジグザグと動く微粒子（ブラウン運動）に適用した．そして，ある時間が経過した後，平均的に粒子が始点からどれくらい離れるかを予測した[20]．これは物理界において奇跡の年と呼ばれている1905年のアインシュタインの三大論文のうちの一つである．この予測は後にペランによって正しいことが示され，原子仮説を支持する有力な証拠となった．一方，バシェリエの研究は当時，評価されなかったが将来のオプション価格を評価するブラックショールズ方程式の基盤的研究になっている．しかし，ランダムウォーク理論では価格変動のベキ則やボラティリティーの長時間相関を説明することはできない．そこで，ランダムウォークモデルを改良したARCHモデル[21]やGARCHモデル[22]が提案されたが，これらのモデルからは異常拡散やバブルやインフレーションを観測することはできないといった問題点がある．しかし，近年，これらの価格変動の基本的な性質をすべて再現するモデルとしてPUCKモデルが提案された．このモデルは，現実の市場から観測される時間とともに変化する動力学的効果をランダムウォークモデルに加えることによって，市場を表現する．また，このモデルを解析的に解くことにより，価格差の分布やモデルにインフレーションやハイパーインフレーションの解が含まれていること，そしてこのモデルがARCHやGARCHモデルを包括していることが理論的に分かってきている[23][24]．

もう一つのよりミクロな視点から市場を記述する方法であり，ディーラーや市場の板情報のダイナミクスをモデル化する物理モデルとしては，板情報モデル[25]～[28]，ファンダメンタリスト vs. チャーティストモデル[29]～[31]，マイノリティーゲームモデル[32]～[34]，スピンベースモデル[35]～[37]，そして，ディーラーモデル[38]～[42]がある．

物理モデルの特徴は，なるべく少ない仮定とパラメータを用いて観測される統計性を再現するモデルを構築し，その現象を明らかにすることである．この点は遺伝的アルゴリズムなどを用いて大量のパラメータの中から最適なパラメータを探し出すコンピューターサイエンスの分野と大きく異なる．

板情報モデルでは指値（リミットオーダー）と呼ばれる，自分がいくら以下で買いたいか，またはいくら以上で売りたいかを示す注文と，成り行き（マーケットオーダー）と呼ばれる今ある最良価格ですぐに取引が起こる注文のダイナミクスを1次元の価格軸上で再現する．これらのモデルは価格差のベキ則，ボラティリティーの長時間相関を満たす．

ファンダメンタリスト vs. チャーティストモデルはファンダメンタリストとチャーティストの比率を調節

することにより，価格差のベキ則，ボラティリティーの長時間相関を再現する．

マイノリティーゲームとスピンベースモデルの構造は本質的には同じであり，買い手（アップスピン）と売り手（ダウンスピン）を設定し，それぞれのディーラーがマイノリティーゲームや群集心理によって相互作用することにより，価格差のベキ則，ボラティリティーの長時間相関を再現する．

価格変動のメカニズムでモデルを分類すると，ファンダメンタリスト vs. チャーティストモデル，マイノリティーゲームモデル，スピンベースモデルは価格変動が需給差（例えば，買い手の数−売り手の数）に比例するというワルラスの一般均衡理論に基づく仮定を用いるが，これは必ずしも実証的に正しいとは限らない．一方，オーダーブックモデルやディーラーモデルでは現実の市場と同じように価格軸上で注文がマッチングして取引が成立し市場価格が生まれるので，こちらの方が現実に近いモデルであるといえる．

ディーラーモデルは，市場で取引を行うディーラーをミクロな構成要素と考え，これをなるべく簡単化してモデル化する．また，取引やディーラーが市場を観測することにより生まれるフィードバック効果をディーラー間の非線形な相互作用と考えることにより，ディーラーの振る舞いの集合である市場価格や取引間隔の再現をめざす．これは，単純化した気体分子モデルから，温度，圧力，体積といった巨視的な関係を記述するボイルシャルルの法則が導かれるように，人間の行動に関しても気体の運動の場合と同じように統計力学的アプローチが可能であると期待させるものである．

ディーラーモデルは決定論的ディーラーモデルが高安（秀）らによって最初に提案された[38]．その後，佐藤らによってディーラーモデルから生み出させる価格変動の分布がベキ分布になるメカニズムが解明され[40]，昨年，確率論的ディーラーモデルによってさらに理論的な解析が進み，また，現実市場の主要な統計性を全て再現することに成功した[42]．

我々は時系列モデルとエージェントベースモデルの両者で市場の統計的性質を再現できることを述べた．この両者の関係を明らかにすることは，ミクロスコピックなディーラーの行動とディーラーの行動の集合であるマクロスコピックな価格時系列の関係を解明することにつながり非常に重要である．我々はこの両者の関係も理論的に明らかにし，市場価格の時系列から観測されるポテンシャルは，取引を行っているディーラーの平均的な戦略に対応し，ディーラーがトレンドを追いかける順張りのときは不安定なポテンシャルが観測され，一方，トレンドと逆の方向に価格が動くと予測する逆張りのときは安定なポテンシャルが観測されることが明らかになった[42]．このことは，市場で取引するディーラーの直感とも良く一致し，また，市場価格から現在のディーラーの平均的な戦略が定量的に評価できる点は，市場の制御を考える上で重要な結果である．

3. 展望

このように，現実の市場を良く再現する，時系列モデルとエージェントベースモデルが提案され，さらに，両モデルの関係も明らかになり，モデル化の領域も高いレベルで完成され始め，金融市場に対する経済物理の研究は応用の領域に足を踏み入れつつある．具体的には政府による効率的な市場介入の方法や，より安定な市場を構築するためのルールの提案などが考えられる．応用を行うにあたっては慎重に議論を行う必要があるが，もし実現すれば，今まで勘と経験にたよって政策を決定してきた分野に対して科学的なアプローチが可能となる画期的な研究といえる．

最後に，経済物理学と聞くと金融を連想しがちであるが，高頻度で信頼ができるデータが存在すればどのようなデータであっても経済物理学の対象になりうる．そのため，近年では金融市場に限らず，企業の取引関係ネットワークデータや財務データ，Web上に蓄積されたブログ記事，コンビニやスーパーマーケットのレシートデータの解析やモデル化も行われ，経済学的，社会学的，物理学的に興味深い現象がいくつも観測されている．企業の取引ネットワークからは，企業間のリンクを削っていくとあるところで突如お金の流れが止まってしまうような相転移現象が観測され，ブログ記事の解析からはある単語が1日あたり何件書き込まれたかを観測すると，インフレーションのように指数関数的に上昇する単語や，ハイパーインフレーションのように2重指数関数やベキ関数的に上昇する単語も見つかっている．また，スーパーのレシートデータからは価格を何パーセント下げると何個売れるかという人の応答関数を観測すると，ベキ則に従っていることがみつかり，中には半額にすると300倍程度も売れる商品も存在する．これらの分野は特にオペレーションズリサーチとも非常に密接に関係しており，今後の交流が期待される．

謝辞　これらの研究成果の一部は，日本学術振興会特別研究員研究奨励費（21・8971）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] ベノワ・B・マンデルブロ（高安秀樹監約）「禁断の市場―フラクタルで見るリスクとリターン」東洋経済新聞社（2008）．
[2] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, An Introduction to Econophysics―Correlation and Complexity in Finance―, Cambridge University Press, Cambrige, (2000).
[3] J.-P. Bouchaud and M. Potters, Theory of Financial Risks, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
[4] 高安秀樹，高安美佐子，『エコノフィジックス―市場に潜む物理法則』，日本経済新聞社，(2001)．
[5] 高安秀樹：『経済物理学の発見』，光文社新書，(2004)．
[6] T. Mizuno, S. Kurihara, M. Takayasu and H. Takayasu, Physica A 324, 296-302 (2003).
[7] R. N. Mantegna and H. E. Stanley, Nature 376, 46-48 (1995).
[8] F. Longin, Journal of Business 69, 383 (1996).
[9] R. Cont, M. Potters and J.-P. Bouchaud, Scaling in stock market data: stable laws and beyond, Scale Invariance and Beyond (Proceedings of the CNS Workshop on Scale Invariance, Les Houches, March 1997).
[10] A. A. Tsonis, F. Heller, H. Takayasu, K. Marumo and T. Shimizu, Physica A 366, 377-386 (2006).
[11] M. Takayasu, T. Mizuno and H. Takayasu, Physica A 370, 91-97 (2006).
[12] K. Watanabe, H. Takayasu and M. Takayasu, Physical Review E, 80 056110 (2009).
[13] K. Watanabe, H. Takayasu and M. Takayasu, Physica A 382, 336-339 (2007).
[14] K. Watanabe, H. Takayasu and M. Takayasu, Physica A 383, 120-124 (2007).
[15] T. Mizuno, M. Takayasu and H. Takayasu, Physica A 308, 411-419 (2002).
[16] A. Johansen and D. Sornette, Physica A 294, 465-502 (2001).
[17] M. Takayasu, H. Takayasu and M. P. Okazaki, Proceedings of "Empirical Science of Financial Fluctuations" in Tokyo, edited by H. Takayasu, Springer, 18-26 (2001).
[18] M. Takayasu and H. Takayasu, Physica A 324, 101-107 (2003).
[19] L. Bachelier, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (iii) 17 (1900) 21 (Translation: Cootner, 1964).
[20] A. Einstein, Annalen der Physik (Germany), 17, 891-921 (1905).
[21] R. F. Engle, Econometrica 50, 987-1002 (1982).
[22] T. Bollerslev, J. Econometrics 31, 307-327 (1986).
[23] M. Takayasu, T. Mizuno and H. Takayasu, Physica A, 383, 115-119 (2007).
[24] M. Takayasu and H. Takayasu, Progress of Theoretical Physics Supplement, 179, 1-7 (2009).
[25] S. Maslov, Physica A 278, 571-578 (2000).
[26] M. G. Daniels, J. D. Farmer, L. Gillemot, G. Iori and E. Smith, Phys. Rev. Lett. 90, 108102 (2003) E. Smith, J. D. Farmer, L. Gillemot and S. Krishnamurthy, Quant. Finance 3, 481 (2003).
[27] J. Maskawa, Physica A 382, 172-178 (2007).
[28] F. Slanina, Eur. Phys. J. B 225-240 (2008).
[29] T. Lux and M. Marchesi, Nature 397, 498-500 (1999).
[30] V. Alfi, M. Cristelli, L. Pietronero and A. Zaccaria, Eur. Phys. J. B 67, 385 (2009).
[31] V. Alfi, M. Cristelli, L. Pietronero and A. Zaccaria, Eur. Phys. J. B 67, 399 (2009).
[32] D. Challet, M. Marsili and R. Zecchina, Phys. Rev. Lett. 84, 1824 (2000).
[33] A. De Martino, I. Giardina, A. Tedeschi and M. Marsili, Phys. Rev. E 70, 025104(R) (2004).
[34] F. Ren, B. Zheng, T. Qiu and S. Trimper, Phys. Rev. E 74, 041111 (2006).
[35] A. Krawiecki, J. A. HoAlyst and D. Helbing, Phys. Rev. Lett. 89, 158701 (2002).
[36] T. Kaizoji, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 370, 109-113 (2006).
[37] W. Zhou and D. Sornette, Eur. Phys. J. B 55, 175-181 (2007).
[38] H. Takayasu, H. Miura, H. Hirabayashi and K. Hamada, Physica A 184, 127-134 (1992).
[39] T. Hirabayashi, H. Takayasu, H. Miura and K. Hamada, Fractals 1, 29-37 (1993).
[40] A. Sato and H. Takayasu, Physica A 250, 231-252 (1998).
[41] K. Yamada, H. Takayasu and M. Takayasu, Physica A 382, 340-346 (2007).
[42] K. Yamada, H. Takayasu and M. Takayasu, Phys. Rev. E 79, 051120 (2009).