最適執行理論：金融実務への応用に向けた理論モデルの構築

加藤　恭

金融トレーディングにおいて，執行アルゴリズムの構築は新たな研究対象として近年脚光を浴びている．適切なモデル構築のためには「本質を捉えた執行モデルの理論的基盤の確立」「実際の市場の様相と理論との整合性を推し量るための実証分析」「実務への適用方法の調査と具体的なアルゴリズムの開発」の3つの観点を常に意識することが重要となる．本稿ではその第一段階として，適切な執行モデルに求められる性質に焦点を当て，近年の理論研究の動向について簡易的なモデルを通して概説を行う．

キーワード：最適執行問題，流動性，マーケットインパクト，確率制御

1. はじめに

定量的アプローチに基づく金融トレーディングにおける多くの問題は，金融資産の売買戦略とそれに対応する将来時点の損益分布に関連する最適化問題として定式化することができる．その最も基本的なものはMarkowitz[11]による平均分散分析であり，近年のモダンポートフォリオ理論の礎を与えた理論といえる．これは，市場の各金融資産からなるポートフォリオ最適化問題を二次計画問題として定式化し，投資家のリスク回避度（または要求期待収益率）に応じた最適な投資ウェイトを算出する仕組みを与えるものである．また効率的フロンティアの考え方はポートフォリオマネジメントにおける基本的な理念を示している．

Markowitzの理論は定量的資産運用において基礎的な枠組を提供しているが，実際に運用実務へと適用する際には様々な課題が存在する．各収益率分布の推計の問題，長期資産運用への適用，実務的制約の克服等，検討すべき点は多様であるが，本稿では特に「執行問題」，すなわち，売買に対する意思決定の後に希望する取引を実際にどのように執り行ったら良いか，という問題を取り上げる．

執行問題を考える場合，重要となるのは適切な執行スケジュールの策定である．つまり，「どの資産をいくつ買いたい（または売りたい）」という要求の下，「いつ，何単位ずつ売買を行うか」という時間軸方向の最適化問題を考えることとなる．本稿では，主に単一の金融資産（およびキャッシュ）に対する多期間最適化問題として最適執行問題を定式化し，関連する先行研究および近年の研究動向を紹介するとともに，執行モデルに要請される条件について理論的な観点から考察を行う．

2. 最適執行問題の定式化

2.1 基本的な枠組

最適執行問題は不確実性を含んだ多期間の意思決定問題として与えられるため，その定式化は確率制御理論の枠組で行われるのが自然と考えられる．確率制御問題とは，大雑把にいえば「制御変数（確率過程）を選択して応答変数（確率過程）をコントロールし，それによって与えられる目的関数を，与えられた制約条件の下で最適化する問題」である．執行理論においては，制御とはトレーダーの執行スケジュール（戦略）であり，応答としてはその戦略に対応する証券保有量，キャッシュ保有量（額）および証券価格の3つが代表的である．ここで証券価格を制御変数に加えた理由の説明は2.2節に譲る．目的関数は状況に応じていろいろなパターンが考えられるが，ある将来時点（終端時刻[1]）におけるトレーダーの保有額や執行にまつわる

[1] 一般に執行問題を考える期間はあまり長くないため，有限期間の最適化問題を考える場合が多いが，無限期間の問題として定式化することも考えられる[12]．また，終端時刻自体も制御変数と考え，適切な執行期間の長さを求める，という研究も存在する[6][13]．

かとう　たかし
㈱三菱UFJトラスト投資工学研究所（MTEC）
〒107-0052 港区赤坂4-2-6

コストの期待効用あるいはリスク尺度として設定されることが多い．

本稿では売却による執行のケースを中心に扱う．以下の説明のため，次のような定式化で与えられる最適執行問題を考える[2]．

$$V(w,\varphi,s)=\sup_{(\psi_t)_t\in\mathcal{A}_T(\varphi)}\mathrm{E}[u(W_T,\varphi_T,S_T)] \tag{1}$$

ここで T は終端時刻であり，W_t，φ_t，S_t はそれぞれ時刻 t におけるキャッシュ保有量，証券保有量，証券価格である．また w，φ，s は各制御変数の初期値．ψ_t は証券の執行量を，$\mathcal{A}_T(\varphi)$ は総執行量が φ 以下となる（すなわち $\sum_t\psi_t\leq\varphi$[3]）ような（許容）戦略全体からなる空間を表している．関数 u はトレーダーの効用関数である．通常はキャッシュ保有量のみに対する関数として与えられる（つまり w のみの関数とする）ことが多いが，ここではより一般的な定式化として，3つ組 (W_t,φ_t,S_t) に対する効用関数を考える．なお多くの研究では

$$u(w,\varphi,s)=w \tag{2}$$

という簡単な効用関数が用いられている．本来執行戦略は確率過程として与えられるものであるが，(2)式の効用関数を持つトレーダーにおいては決定論的な（つまり初期時点において完全に執行スケジュールを決められる）戦略のみを考察すれば良い場合が多い．

(1)式のような多期間の最適化問題を考える際，離散時間モデルによる定式化と連続時間モデルによる定式化を考えることができる．これらの比較については2.4節で触れるが，ここでは取引可能時刻が $t=0, T/n,\cdots,(n-1)T/n$ で与えられるような離散時間モデルをまず扱うこととする（n は自然数）．また以下簡単のため $T=1$ と設定する．

(1)式は「初期時点 $t=0$ においてキャッシュ，証券をそれぞれ w，φ だけ保有しているトレーダーが，初期証券価格 s である市場において執行スケジュール $(\psi_t)_t$ をどのように選べば，終端時刻における3つ組 (W_T,φ_T,S_T) の期待効用を最大化することができるか？」を表していると解釈することができる．そのためには3つ組確率過程の t に対する変動を記述する方程式を与える必要がある．そこで，自然数 k に対し $W_{k/n}$，$\varphi_{k/n}$，$S_{k/n}$ および $\psi_{k/n}$ が与えられたとき，確率変数 $W_{(k+1)/n}$，$\varphi_{(k+1)/n}$ は以下のように求められるとする．

$$W_{(k+1)/n}=W_{k/n}+\psi_{k/n}S_{k/n}, \tag{3}$$

$$\varphi_{(k+1)/n}=\varphi_{k/n}-\psi_{k/n} \tag{4}$$

これらの式は「証券を売却した分だけキャッシュ保有額が増え証券保有量が減る」ことをそのまま意味している．証券価格の変動については，例えば「証券のリターンが正規分布に従う」ような基本的な市場モデルを扱う場合は，$(Z_k)_k$ を独立同分布正規確率変数列として

$$S_{(k+1)/n}=S_{k/n}\times\exp(Z_k) \tag{5}$$

のように与えることができる．より一般的な状況を扱う場合，stochastic flow 等の概念を用いることも考えられる．しかし，執行問題を扱う場合，証券価格の変動を記述するためにはこれらの定式化は実は不十分である．

2.2 流動性，特にマーケットインパクト

(1)，(3)-(5)式によって，簡単な場合の最適執行問題を一応は定式化することができた．そこで，さらに最も単純なケースとして，効用関数が(2)式で与えられる，すなわちトレーダーが執行損益に対してリスク中立的である場合について考察する．この場合の最適執行戦略は自明である：証券の（リスク調整後）期待リターンが正であれば終端時刻直前で，負であれば初期時点で一括執行（block liquidation）をすればよい．すなわち

$$\psi_{k/n}=\begin{cases}\varphi 1_{\{n-1\}}(k) & (\tilde{\mu}>0\text{ のとき}),\\ \varphi 1_{\{0\}}(k) & (\tilde{\mu}<0\text{ のとき})\end{cases}$$

が最適執行戦略となる[4]．ただし $\tilde{\mu}=\mu+\sigma^2/2$ であり，μ，σ はそれぞれ Z_k の平均値，標準偏差とした．

しかし実際のトレーディングにおいては，大規模な取引を一度に執り行うことは現実的ではない．売却のためには対応する買い手が必要であり，需要と供給のバランスを崩すような大規模な一括売却は証券価格を大きく下げてしまい，トレーダーにとっても不利益となってしまう．

このような，「トレーダーの望む取引が必ずしも市場で行えるとは限らない」という問題を（非）流動性

[2] 問題の定式化は研究によって多様であるが，ここでは文献[8]のものをベースにした．ただし，本稿の目的は様々な研究の特徴や主張を紹介し，執行理論の概要について統一的に解説することであるため，以下の議論では数学的厳密性が損なわれている箇所もあるが，御容赦いただきたい．

[3] 実際の執行においては終端時刻までに執行を完了させなければならない状況が多く，その場合は $\sum_t\psi_t=\varphi$ と，売り切り制約を考えることとなる[8]．

[4] $\tilde{\mu}=0$ のときはあらゆる執行戦略に対して損益は同じとなる．なお $1_{\{a\}}(k)=1(k=a), 0(k\neq a)$ である．

の問題と呼ぶ．その中でも，執行理論を考える際に特に重要となるのはマーケットインパクト（以下MIと略す）の問題である．これは，上でも触れたように「トレーダーの執行によって証券価格が変動してしまう」という事象（およびその影響）を表す．

(3)-(5)式ではMIを考慮しない理想モデルにおける定式化を扱っていた．MIを含んだモデルへと拡張するため（また証券価格についてより一般的な変動のモデルを記述するため），(3)式および(5)式を以下のように拡張する．

$$\tilde{S}_{k/n}=S_{k/n}\exp(-g(\psi_{k/n})), \tag{6}$$

$$W_{(k+1)/n}=W_{k/n}+\psi_{k/n}\tilde{S}_{k/n}, \tag{7}$$

$$S_{(k+1)/n}=Z\left(\frac{k+1}{n};\ \frac{k}{n},\tilde{S}_{k/n}\right) \tag{8}$$

ここで$g(\psi)$は「ψだけ証券を売却したときに価格が（対数リターンベースで）どれだけ目減りするか」を表す関数で，以下ではMI関数と呼ぶことにする．最も簡単なMI関数として，$g(\psi)=a\psi\ (a>0)$という線形なものが挙げられ，多くの研究で用いられている．

$\tilde{S}_{k/n}$は，k/n時点における執行が終了した直後の証券価格を表す．トレーダーが得られる代金は，売却によって需給バランスが崩れ，それを受けて価格が下落した後の証券によって与えられるとここでは考える[5]．

また$Z(t;\ r,s)\ (t\geq r)$は証券価格の時間変化に伴う変動を記述する確率過程であり，「時刻$t=r$において初期値sを持つ，ある確率微分方程式（SDE）の解」として与えられる[6]．MIによって$\tilde{S}_{k/n}$に下落した証券価格は，Zが定める（ノイズを含んだ）「流れ」に従って$S_{(k+1)/n}$に変化する．

(1), (4), (6)-(8)式によって一般的な枠組における離散時間の最適執行問題が定式化される．

また，最適執行問題では執行期間が短い場合を扱うことが多いため，証券価格が負となる可能性も許容し，確率過程$Z(t;\ r,s)$として（ドリフト付き）算術Brown運動等を適用した上でさらに$\tilde{S}_{k/n}=S_{k/n}-g(\psi_{k/n})$のように定式化することで問題をより扱いやすくしているケースもしばしば見られる（以下算術的な定式化と表記する）．MIを考慮した最適執行問題の最初期における研究である文献[4]では，証券価格の時間変動が算術Brown運動に従い，かつMI関数が線形である場合のリスク中立なトレーダーに対する期待売却代金最大化問題を扱っている．

[5] リミットオーダーブック型のモデルにおいては，板の形状を意識し，これとは異なった定式化がなされることも多い[1][10]．

[6] 数学的には，$Z(t;\ r,s)$そのものではなくその対数過程に対するSDEを記述する方が扱いやすい．

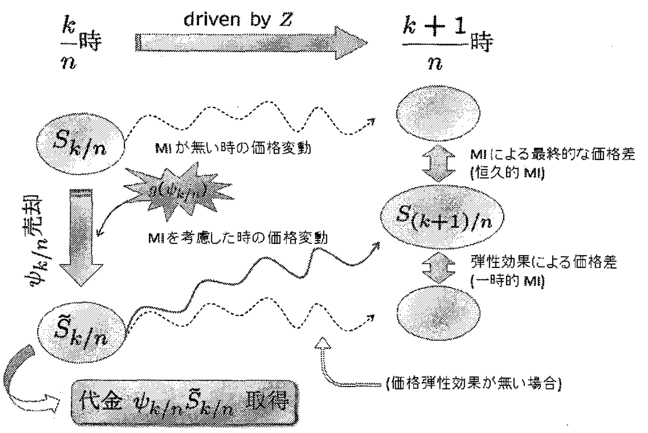

図1　証券価格変動のイメージ

2.3　価格弾性効果

大規模な売却に伴う価格変化は本来の証券価値の下落に直接よるものではないため，時間とともにある程度の価格回復が見込まれる，と考えられる．これは価格弾性効果（resilience）と呼ばれる（図1）．MIは，執行後もその影響が残る「恒久的MI」と，時間経過とともに回復（消滅）する「一時的MI」とに分解できるといわれる[6]．この一時的MIは価格弾性効果によってもたらされるものである．

Almgren-Chrissによる文献[3]は文献[4]を発展させ，恒久的MIと一時的MIの両方を考慮したモデルにおいて最適執行戦略の導出を行っている．彼等のモデルは実務的にも扱いやすく，幅広く用いられている．

前節のモデルの場合，価格変動を表す確率過程$Z(t;\ r,s)$が（幾何）Brown運動に従うようないわゆるBlack-Scholes型のモデルにおいては，価格弾性効果は存在せずMIは恒久的なもののみとなるが，$Z(t;\ r,s)$に平均回帰性を持たせることで価格弾性効果を含んだモデルを考察することができる[9]．

算術的な定式化に基づくモデルにおいて，文献[5]は価格弾性効果（およびMIの強さ）を記述するdecay kernelという関数を導入し，関数解析的な観点から，decay kernelの形状と最適執行戦略が満たす積分方程式の対応付けを行っている．他にも，文献[5]の著者等によって価格弾性効果と市場モデルの実効性について多くの研究がなされているが，それについては3.2節で扱う．

2.4　離散時間モデルか？　連続時間モデルか？

上で構築した一般的な離散時間モデルにおいて，

(適当な数学的仮定の下で) $n \to \infty$ と極限を取ることで，次のような連続時間モデルの導出が可能である[7][8].

$$\hat{V}(w, \varphi, s) = \sup_{(\phi_t)_t \in \hat{\mathscr{A}}_T(\varphi)} \mathrm{E}[u(W_T, \varphi_T, S_T)],$$
$$dW_t = \phi_t S_t dt,\ d\varphi_t = -\phi_t dt,$$
$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_r)dt - \hat{g}(\phi_t)dt,$$
$$S_t = \exp(X_t), (W_0, \varphi_0, S_0) = (w, \varphi, s)$$

数学的な詳細については割愛するが，この場合の執行戦略 ϕ_t は t 時点における瞬間的な執行量，すなわち執行速度を表していることとなり，MI関数も執行速度に対する関数として与えられる．離散時間モデルでは証券価格の変動の記述はやや煩雑であったが，連続時間モデルでは1つのSDEによって行うことができ，また時間経過に伴う変動の項とMIによる項との関係もより明確に記述することができる．

執行理論やMIといった新しい概念に対する基礎研究を行う際，重要なのは「実際の市場における現象を正確かつ適切に記述する」ことであり，その意味で離散時間モデルは優れている．連続時間の確率モデルは，数学的な難しさも相まって，正確な現象の記述は困難であることも多い．執行理論における数学的な枠組の基盤を構築する際，離散時間モデルはより柔軟に市場を記述することができるであろう．一方，離散時間モデルにおいて計算を進めていくと，数式が煩雑になり本質が見えにくくなることも起こり得る．大数の法則や中心極限定理は確率論における強力な道具であるが，これらを離散時間モデルに適用することで上記の煩雑さが削ぎ落とされ，本質的な部分をより明確に捉えることができる可能性がある．そのため，極限移行によって導かれた連続時間モデルは理論の本質を見極めるために重要だといえる．市場の実状を正しく記述した離散時間モデルの極限として得られる連続時間モデルを用いることで，適切な執行モデルの持つ理論的構造を解析的に調べることが可能となると考えられる．

3. 執行モデルの理論的課題

3.1 分割執行

2.2節で触れたように，執行理論の重要な役割の一つは，流動性の問題から一括執行が最適とならない場面において適切な分割執行 (gradual liquidation) 戦略を求めることである．そのため，一括執行が最適となるような執行モデルは妥当とはいえず，トレーディングにおける実状を十分に記述できているとはいえない．

実は連続時間モデルの場合，証券価格のダイナミクスを (幾何) Brown運動で与え，かつMIを線形としたとき，リスク中立なトレーダーにとっては保有証券を一度にまとめて執行する一括執行が最適となることが分かる[8][9][7,8]．執行モデルの構築において，この設定は十分ではないのである．

ここで，以下の拡張を施すことを考える．

(a) MI関数がconvex (特に非線形)

(b) 証券価格が平均回帰性を持つ (価格弾性効果)

どちらの条件を施した場合についても，最適執行戦略には分割執行が必要となることが分かる[9]．すなわち，非線形MI，価格弾性効果のどちらも，適切な執行モデルの構築のためには理論的に重要な概念であることが分かる．

3.2 逆執行と価格操作

これまで考えてきた最適執行問題では売却を扱っているため，常に $\phi_t \geq 0$ であることが想定されていた．では，このような仮定を置かない場合にはどうなるであろうか？　売却執行の最適化問題を考えているのだから，最適戦略は非負であることが期待される．

ここで簡単な数値実験を行ってみよう．2.2節の離散時間モデルにおいて，$n=5, (w, \varphi, s)=(0,1,1)$ と置き，証券価格の時間による変動はないものとする (すなわち $Z(t\,;\,r,s)=s$)．また効用関数は(2)式のものとする．もしMIがない場合，どのような戦略に対しても期待売却代金は1である．今，MIは二次関数で与えられているとし，$g(\phi)=\phi^2/2\ (\phi \geq 0)$, $-\phi^2/2\ (\phi < 0)$ としよう．このとき，購入を許さない，すなわち $(\phi_t)_t$ に非負制約を課したときの最適解は図2のようになることが分かる．期待売却代金はMIがない場合と比べて0.055だけ目減りしており，これがMIによって生じた執行コストと捉えることができる．しかし，非負制約を外した場合，この戦略は最適とはならない．図3で与えた戦略は $t=0.6, 0.8$ において $\phi_t < 0$ となり購入が生じているが，非負制約下での最適戦略がもたらす売却代金を上回るばかりか，MIがないときの

[7] 厳密には準最適戦略 (nearly optimal strategy) として与えられる．また $Z(t\,;\,r,s)$ がマルチンゲールである場合にはあらゆる執行戦略が解となる．

[8] 離散時間モデルにおいてはこれは必ずしも成り立たない[4]．その他，以下では分かりやすさのために，正確な表現での主張を避け曖昧な書き方をしていることに注意しておく (厳密な議論については各引用文献を参照されたい)．

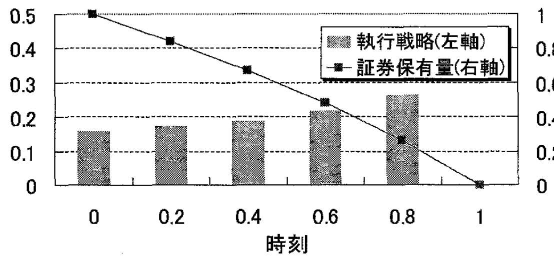

図2　執行戦略と保有証券量の推移（非負制約あり）．期待売却代金＝0.945

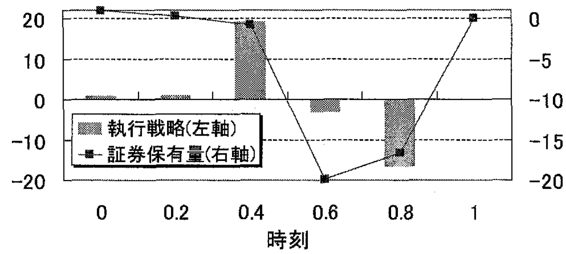

図3　執行戦略と保有証券量の推移（非負制約無し）．期待売却代金＝1.024

ものよりも多くの代金を得ることができている．その他，算術的な定式化の下で興味深い数々の例が文献[2]で触れられている．

この例から分かるように，売却執行を考えているにもかかわらず最適戦略に購入が現れてしまう逆執行（reverse trading）の状況はモデルによっては起こり得る．しかしこのような現象は実務的には考えにくいものであり，適切なモデリングのためには除外されるべきである[9]．

また，ポートフォリオ理論における重要な概念として裁定（arbitrage）がある．これは「リスクなしでただ儲けする機会」を意味しており，裁定機会が存在しないことは適切な市場モデル構築の際に求められる条件の一つである．執行理論において同様の概念として価格操作（price manipulation）と呼ばれるものがある．これは大まかにいうと，「証券を保有していない人が買いと売りをうまく組み合わせて正の期待収益を得られる戦略」であり，このような戦略が最適となり得る執行モデルはやはり望ましいものとはいえない．

実はこれらの概念は価格弾性効果と強い関係がある．算術的な定式化による線形MIモデルにおいて，

[9] もちろん，証券価格が正または負の期待リターンを持っている場合は，逆執行を検討することもあり得る．しかし上で扱われている例はいずれも証券価格の変動がmartingaleでありトレーダーはリスク中立的なのである．

decay　kernelがconvexであることおよびpositive definiteであることが，逆執行および価格操作の可能性の有無とそれぞれ対応することが文献[2]によって示されている．しかし，わずかなモデル設定の違いによって異なる結論が得られることもあり，数学的に微妙な問題が存在している．また，逆執行や価格操作に関しては複数資産に対する最適執行問題に対しても興味深い課題が数多く残されており[10][13]，非線形MIに対しての研究も含め，今後さらなる発展が期待される．

3.3　適切なモデルに要請されるもの

理論的にも実務的にも意味のある執行モデルを構築する際，本質を見落とさずモデリングを行うこととともに，実際のトレーディングにおいても違和感のないものを目指すことが重要である．3.1，3.2節では，最適執行問題の解がより現実的なものとなるようなモデルに対して求められる条件について扱ってきた．その条件としてMI関数の非線形性や適切な価格弾性効果の記述が挙げられる．これらの条件は理論面からの要請と捉えることができるが，一方で実際の市場においてこのような現象が観察されるかについて，実証的な立場から検証がなされることも重要である．

また上でも触れたように，数学的な設定の違いによって異なる結論がもたらされることもあるため，数学的，ファイナンス理論的に妥当な理論の構築を目指すことだけでなく，理論的に得られる結論についてその背後の関係性（結論を本質的に導いたものは何か）を把握することが大切だといえよう．

4.　執行コスト

執行モデルに対して実務的に期待される機能として，妥当な執行スケジュールの策定とともに，それによってもたらされる総コスト（トータルMI）の推計がある．MIコストは目に見えるものではないため，事前の推計が困難であるだけでなく事後的な把握方法についても絶対的な方法があるわけではない．

上で考察してきたMI関数$g(\phi)$は，一回あたりの発注に伴うMI，すなわちワンショットMIを表している．一方，最適執行問題を解くことで終端時刻における損益分布を求めることができるが，それとMIがないときの（理想的な）売却益を比較することで，トータルMIの分布を理論的に与えることができる．特に，リスク中立なトレーダーに対して，初期証券保有量φに対するトータルMI関数$\mathrm{MI}(\varphi)$を定義するこ

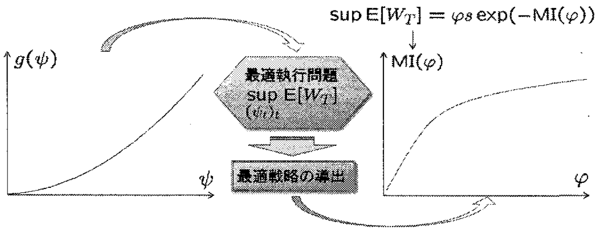

図4　ワンショットMI（左）v.s. トータルMI（右）

とを考えよう．3.1節でワンショットMI関数 $g(\psi)$ がconvexであることが理論的な観点から重要であると述べたが，その場合にも適切な分割執行戦略によって，図4のように φ が大きいときのトータルMIを抑制することが可能となる[9]．

このように，執行コストの事前的な把握の意味でも最適執行問題を考えることは大きな意味を持つが，実務への応用を考えるためにはワンショットMI関数の推計も重要な課題となってくる．MI関数の推定やMIコストの計量に関して今までも様々な実証分析がなされてきたが，近年では株式等の複数気配データの取得も以前より容易となり，高頻度データを用いた精緻な分析を行うための環境も整いつつあるため，今後ますます研究が盛んになるものと思われる．

5．おわりに

本稿は最適執行問題の理論モデル構築にまつわる話題を中心に，簡易的なモデルを通して近年の研究動向について紹介し，適切な執行モデルに求められる理論的性質について解説を行った．

紙面の都合から本稿では触れることができなかったが，ここで述べた以外にも執行理論に関する研究が様々な観点からなされている．例えば，MIを含んだ市場モデルについて数理経済学やマイクロストラクチャー等の観点から行った研究も数多く存在する．数理ファイナンスにおいては，インパルスコントロール等の手法を用いて直接的に連続時間の数理モデルを構築する，というアプローチも知られている．

このように，執行理論について近年様々な研究がなされているとはいえ，その歴史はポートフォリオ理論と比較するとまだ深くはないといえる．そのため，今後の執行理論の進展および実務への応用を考える際，ただ「使いやすいモデル」というだけではなく理論的にも妥当性を持つことが保障されるモデルを構築するために要請されるものは何かを考察することは，現段階では極めて重要な課題である．それとともに，実務的な要請を十分踏まえた上で，理論をどのように具体的なモデルに落とすかを考察することも必要である．サブプライム問題やリーマンショックを引き合いに出すわけではないが，最適執行アルゴリズムの理論的およびその適用方法において，数理，工学の研究者および実務家が互いの理解を示しながら，手を取り合って高度化を担っていくことが望ましい．

参考文献

[1] A. Alfonsi, A. Fruth and A. Schied: Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions, *Quantitative Finance*, 10 (2) (2010), 143-157.

[2] A. Alfonsi, A. Schied and A. Slynko: Order book resilience, price manipulation, and the positive portfolio problem, *Preprint* (2009).

[3] R. Almgren and N. Chriss: Optimal execution of portfolio transactions, *J. Risk*, 3 (2000), 5-39.

[4] D. Bertsimas and A. W. Lo: Optimal control of execution costs, *J. Fin. Markets*, 1 (1998), 1-50.

[5] J. Gatheral, A. Schied and A. Slynko: Transient linear price impact and Fredholm integral equations, *Preprint* (2010).

[6] 久田祥史，山井康浩：流動性リスク評価方法の実用化に向けた研究，日本銀行金融研究所「金融研究」，9 (2000), 29-76.

[7] 石谷謙介，加藤恭：不確実性を含んだマーケット・インパクトモデルの下での最適執行問題，MTECジャーナル，21 (2009), 83-108.

[8] T. Kato: Optimal execution problem with market impact, *arXiv preprint* available at: http://arxiv.org/pdf/0907.3282 (2009).

[9] T. Kato: When market impact causes gradual liquidation?: From the theoretical view of mathematical finance, 京都大学数理解析研究所講究録, 1675 (2010), 158-172.

[10] 牧本直樹，杉原慶彦：Optimal execution of multiasset block orders under stochastic liquidity, 京都大学数理解析研究所講究録, 1675 (2010), 185-198.

[11] H. Markowitz: Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, *John Wiley & Sons*, New York (1959).

[12] A. Schied and T. Schöneborn: Risk aversion and the dynamics of optimal liquidation strategies in illiquid markets, *Finance and Stochastics*, 13 (2009), 181-204.

[13] E. E. Qian: Optimal trading strategy with optimal horizon, *Journal of Investment Management*, 6 (3) (2008).