状態推定

中村　和幸

状態空間モデルやその応用モデルは，時系列解析に用いられる統計モデルの多くを包含するだけでなく，モデルに含まれる時変状態変数のオンライン型推定（フィルタ）やオフライン型推定（平滑化）を統一的に扱うことが可能であるという利点から広く使われている．近年では，非線形性を適切に取り扱うことが可能な粒子フィルタなど，非線形フィルタも広まりつつあり，従来及ばなかった範囲にまで応用範囲が拡がっている．本稿はこれらの状態推定手法を概説する．

1.　状態推定とは

時系列データの解析や信号処理といった系列データの解析では，AR モデル，GARCH モデル，隠れマルコフモデルなどが用いられている．これらのモデルには，

- 離散時間 t 上で変数が定義される．
- 各時点 t に観測変数 y_t と状態変数 x_t がある．
- 状態変数は1重または多重のマルコフ性があり，観測変数はその時点の状態変数にのみ依存する．

という特徴があり，適切な変形により図1のような変数間の関係を持つモデルに書き換えられる．時系列解析における状態推定は，観測 $\{y_1, y_2, \cdots, y_\tau\}$（以下，$y_{1:\tau}$ と表記）で条件付けられた

- **予測**：x_k（$k>\tau$）の推定値または分布
- **フィルタ（濾波）**：x_τ の推定値または分布
- **平滑化（スムージング）**：$x_k(k<\tau)$ の推定値または分布

を得ることが目的となる[2]．

2.　カルマンフィルタと長期予測

状態空間モデルとは，次のようなモデルである：

$$\begin{cases} x_t = F_t x_{t-1} + G_t v_t \\ y_t = H_t x_t + w_t \end{cases} \quad (t=1, 2, \cdots, T). \tag{1}$$

ただし，v_t，w_t はそれぞれ正規分布 $N(0, Q_t)$，$N(0, R_t)$ に従うノイズである．また，初期状態 x_0 は正規分布 $N(x_{0|0}, V_{0|0})$ に従うとする．

カルマンフィルタ[1]は，状態空間モデル(1)において，時点 t までの観測 $y_{1:t}$ で条件付けた状態 x_t の平均 $x_{t|t}$ と分散共分散行列 $V_{t|t}$ をオンラインで推定する手続きである．カルマンフィルタでは，以下の**一期先予測**と**フィルタリング**を時点1から交互に行う：

（一期先予測）

$$x_{t|t-1} = F_t x_{t-1|t-1},$$
$$V_{t|t-1} = F_t V_{t-1|t-1} F_t^T + G_t Q_t G_t^T.$$

（フィルタリング）

$$K_t = V_{t|t-1} H_t^T (H_t V_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1},$$
$$x_{t|t} = x_{t|t-1} + K_t (y_t - H_t x_{t|t-1}),$$
$$V_{t|t} = (I - K_t H_t) V_{t|t-1}.$$

この手続きにより，繰り返しの最後の時点 t までの観測を反映させた状態推定が得られる．式から分かるように，一期先予測では状態変数の時刻を $t-1$ から t に進め，フィルタリングで時刻 t の観測を反映させている．したがって，一期より先の長期予測を行う場合には，一期先予測の手続きのみを繰り返していけばよい．カルマンフィルタは，オンラインでの発見や予測に使われることが多い．

3.　固定区間平滑化

固定区間平滑化は，最終時点 T までの観測 $y_{1:T}$ が与えられた条件下での状態の条件付き平均 $x_{t|T}$ と分散共分散行列 $V_{t|T}$ の推定を与えるオフライン型の手続きである．固定区間平滑化では，時刻 T までカルマンフィルタを終えた後に，時刻を遡って計算する：

$$A_t = V_{t|t} F_{t+1}^T V_{t+1|t}^{-1},$$
$$x_{t|T} = x_{t|t} + A_t (x_{t+1|T} - x_{t+1|t}),$$
$$V_{t|T} = V_{t|t} + A_t (V_{t+1|T} - V_{t+1|t}) A_t^T.$$

平滑化は，過去の状態から知見を得るために用いられ

なかむら　かずゆき
明治大学 研究・知財戦略機構
〒214-8571 川崎市多摩区東三田 1-1-1

ることが多い.

4. 拡張カルマンフィルタ

式(1)に非線形・非ガウス性を入れたモデル

$$\begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, v_t) \\ y_t = h_t(x_t, w_t) \end{cases} \quad (t=1, 2, \cdots, T), \tag{2}$$

に対しては，カルマンフィルタの手続きを適用できない．そこで，線形近似を行って実現するのが**拡張カルマンフィルタ**である．拡張カルマンフィルタでは，F_t 等の行列に各時点での平均値回りのヤコビ行列(例えば $F_t = \frac{\partial f_t}{\partial x_{t-1}}$) を用いる．線形近似であるから，非線形性が弱い場合には十分な推定が得られるが，非線形性が強い場合や微分不能な場合には適切でない．この問題点を克服するために，さまざまな非線形フィルタ手法を用いることになる．

5. 粒子フィルタ

非線形フィルタを与えるために，図1のような変数間の関係をもつ，より一般のモデルを考える．このモデルは，

$$p(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t-1}) = p(x_t|x_{t-1}),$$
$$p(y_t|x_{0:t}, y_{1:t-1}) = p(y_t|x_t)$$

を満たすとする．すると，一期先予測とフィルタリングの計算式を分布を用いて書くと，それぞれ順に

$$p(x_t|y_{1:t-1}) = \int p(x_t|x_{t-1})p(x_{t-1}|y_{1:t-1})\mathrm{d}x_{t-1},$$

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})}{\int p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})\mathrm{d}x_t}$$

となる．状態空間モデルの場合には，分布が正規分布となりカルマンフィルタとして計算できるが，一般のモデルでは，求める確率分布を解析的に与えることは困難である．また，分布を直接数値積分する方法[2]は，次元の呪いと実装の問題からやはり困難で，適用は低次の問題に限られてしまう．

粒子フィルタ（モンテカルロフィルタ，ブートストラップフィルタ）[2][3]は，1990年代前半に提案された非線形フィルタであり，モンテカルロ法による近似を用いて積分困難性を緩和している．粒子フィルタでは，分布 $p(x_t|y_{1:t})$ を N 個の実現値の集合 $\{x_{t|t}^{(i)}\}_{i=1}^N$ で近似する．式(2)の場合の粒子フィルタの手続きは次の通りである：

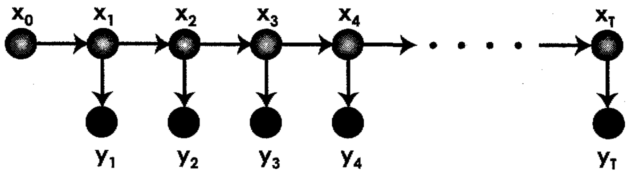

図1 状態空間モデルにおける変数の関係

1. (一期先予測)：各 $i(=1, \cdots, N)$ について
   (a) 実現値 $v_t^{(i)}$ を v_t の分布から発生
   (b) $x_{t|t-1}^{(i)} = f_t(x_{t-1|t-1}^{(i)}, v_t^{(i)})$ を計算
2. (フィルタリング)：
   (a) 各 i について $w_t^{(i)} = p(y_t|x_t = x_{t|t-1}^{(i)})$ を計算
   (b) $\{x_{t|t-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ から重み $w_t^{(i)}$ の比に従って N 回復元抽出し，$\{x_{t|t}^{(i)}\}_{i=1}^N$ とする．

フィルタリングでは，過去の重みに現在の重みを掛けて保持し，重みの分布に偏りが生じた場合のみに復元抽出を行う方法[3]も広く用いられている．実現値やサンプル点を用いた他の非線形フィルタの手法には，アンサンブルカルマンフィルタやUnscentedカルマンフィルタ等がある．

現在，非線形フィルタの応用は，次元の小さい時系列データの解析だけでなく，ドメイン知識を反映した非線形シミュレータと非線形フィルタを組み合わせるデータ同化[4]や，大規模な時系列データ解析への応用などに広がってきている．これは，非線形フィルタ手法の発展と計算機性能，特に並列計算性能の向上によるところが大きく，今後もその応用範囲は広がっていくものと考えられる．

参考文献

[1] 片山徹，『新版　応用カルマンフィルタ』，朝倉書店，2000.
[2] 北川源四郎，『時系列解析入門』，岩波書店，2005.
[3] A. Doucet, J. F. G. de Freitas and N. J. Gordon, "An Introduction to Sequential Monte Carlo Methods," in *Sequential Monte Carlo methods in practice*, A. Doucet, J. F. G. de Freitas and N. J. Gordon, eds., Springer-Verlag, 2001.
[4] 中村和幸，上野玄太，樋口知之，「データ同化：その概念と計算アルゴリズム」，『統計数理』，53 (2005), 211-229.