多項式最適化問題に対する半正定値計画緩和

脇　隼人

本稿では，あるSDPの例題を通じて多項式最適化問題（POP）に対するSDP緩和を紹介する．さらに，この例題が持っている興味深い性質についても紹介する．この例題はある簡単な一変数多項式で構成されるPOPのSDP緩和問題である．このSDPに対してSeDuMiやSDPAは，SDPの最小値とは全く異なる値を近似最小値として出力させるが，その値はPOPの最小値と一致している．本稿では，POPに対するSDP緩和を紹介し，二乗和多項式を使ってこの現象を解析する．この解析から，このSDPを数値的に解くことが非常に難しいことがわかる．

キーワード：多項式最適化問題，二乗和多項式，半正定値計画緩和

1．はじめに

SDPに対する主双対内点法は，主問題と双対問題が共に実行可能内点解を持っているという仮定のもとで，収束性等の議論を展開した．では，もしこの仮定が成り立たない場合はどうなるのであろうか？　すなわち，主問題または双対問題のどちらか一方でも実行可能内点解を持たない場合はどうなるのだろうか？中田真秀氏の記事では，SDPLIBにある内点を持たないSDPに対する数値実験を行い，倍精度の計算では精度の良い解が得られないことを報告している．

本稿では，

(i) 多項式最適化問題（POP[1]）に対するSDP緩和について簡単に紹介する．

(ii) さらに，あるPOPから得られるSDP緩和問題を紹介する．これが，冒頭で述べたSDPの例題であり，実行可能内点解が存在しない．このSDPに対して，SeDuMiやSDPAはSDPの最小値とは全く違った値を近似最小値として出力するが，それは，POPの最小値と一致している．この原因は，このSDP緩和問題が微小な摂動に弱いためだと考えられる．その数値実験の結果と考察を行う．

本稿の構成は次のようになっている：(i)については，4節に，(ii)については，主に3節と5節に記述した．(i)はできるだけ手短にまとめたので詳細を知りたい読者は，文献[4][6][7][8]を参照してほしい．また，(ii)に関しては，文献[15]の議論をまとめたものとなっている．

2．多項式最適化問題

POPとは，多項式の不等式で表現される集合上で多項式を最小化する問題のことである．数式で記述すると，次のように書ける：

$$\begin{cases} \inf & f_0(\boldsymbol{x}) \\ \text{sub. to} & f_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \ (j=1, \cdots, m). \end{cases} \tag{1}$$

ただし，変数$\boldsymbol{x}$はn次元実数ベクトルであり，$f_0, f_1, \cdots, f_m$はn変数の多項式である．例えば，最大カット問題，最大重み安定集合問題などの組合せ最適化問題や二次計画問題などはPOPとして記述できる．

Lasserre[5]やParrilo[9]によって，SDPを利用してPOPの最小値の下界値を求める手法が提案されている．この提案以降，POPに対するSDP緩和が注目されるようになった理由として，

- たとえ非凸なPOPであっても，SDP緩和によってPOPの最小値そのものを得ることができる．
- また，POPによってはSDP緩和問題の解からPOPの最小解を得ることができる．
- 実代数幾何学や関数解析の分野と密接に関連していて，数学的にも興味深い．

ことがあげられる．

POPに対するSDP緩和を実装したソフトウェアとして，Gloptipoly[3]，SOSTOOLS[10]，SparsePOP[12]が公開されている．いずれもMATLABとSeDuMiを利用する．ただし，SparsePOPに関して

わき　はやと
電気通信大学 大学院情報理工学研究科
〒182-8585 調布市調布ヶ丘1-5-1

[1] Polynomial Optimization Problemsの頭文字をとってPOPと略記する．

はSDPAを使うこともできる．

SparsePOPは，POPが“疎構造”を持っている場合に，それを利用してよりサイズが小さいSDP緩和問題を構成する手法を組み込んでいる．疎構造に関しては，文献[11]の3節と4節を参照してほしい．一般に，POPに対するSDP緩和では，変数の数が多いと，得られるSDP緩和問題が大規模になる．疎構造を利用してこの困難を克服しようとしたのが，文献[11]やそれを実装したSparsePOPである．

3．例題について

この節では，1節の冒頭で述べたSDPの例題について概略を紹介する．このSDPは，以下の一変数多項式で構成されるPOPに対するSDP緩和で得られる：

$$\inf x \ \text{sub. to}\ x \geq 0, \quad x^2 - 1 \geq 0. \tag{2}$$

POP(2)は，最小値1，最小解$x=1$である．

後ほど，POPに対するSDP緩和を詳しく紹介するが，実は，POP(2)に対して正の整数rを与えることで，SDP緩和問題$\mathbb{Q}_r$が一つ得られる．このSDP緩和問題$\mathbb{Q}_r$は以下の性質を持っている．詳細は文献[15]を参照してほしい．

1. $\mathbb{Q}_r$は実行可能解を持っているが，実行可能内点解を持たない．
2. 一方，双対問題は，実行可能内点解を持つ．したがって，強双対定理から，$\mathbb{Q}_r$は最適解を持つ．
3. $r \geq 2$で構成される$\mathbb{Q}_r$に対して，双対問題は最適解を持たない．つまり，双対問題の最適値に到達する解は存在しないが，そこに近づくような実行可能解はある．ただし，$\mathbb{Q}_1$の双対問題は最適解を持つ．

さて，このSDP緩和問題$\mathbb{Q}_r$に既存のSDPソルバーを適用したらどうなるだろうか．文献[15]では，SeDuMi 1.2とSDPA 7.1.1で数値実験を行い，以下の表1，2にある結果を得ている．なお，SeDuMiとSDPAは双対ギャップと実行可能性が，それぞれ1.0e-9,1.0e-7以下になると終了するようにした．

これらの表では，opt. val.，P. Feas.，D. Feas.はSDP緩和問題$\mathbb{Q}_r$のSeDuMiやSDPAが求めた近似最適値と，近似最適解の主問題，双対問題における実行可能性を表している．また，D. gapは，主問題と双対問題の近似最適値の差を示している．

表1，2から次のことがいえる：

- rに関して，SDP緩和問題$\mathbb{Q}_r$の近似最適値が単調増加している．

表1 SeDuMi 1.2の結果

r	opt.val.	P. Feas.	D. Feas.	D. gap
1	1.10e-13	0.0e+00	3.3e-13	-9.8e-14
2	2.64e-03	0.0e+00	9.8e-10	-1.8e-04
3	1.29e-01	0.0e+00	1.2e-09	-0.4e-02
4	7.36e-01	0.0e+00	1.1e-09	-1.0e-02
5	1.0e+00	5.4e-11	3.8e-10	-2.0e-10
6	1.0e+00	1.1e-10	9.7e-10	-6.0e-10

表2 SDPA 7.1.1の結果

r	opt.val.	P. Feas.	D. Feas.	D. gap
1	3.39e-09	7.3e-12	1.1e-12	2.9e-08
2	1.23e-02	1.5e-11	9.4e-08	2.9e-03
3	3.31e-01	5.7e-14	8.9e-08	4.3e-02
4	9.97e-01	1.1e-14	5.3e-08	8.2e-04
5	1.00e+00	1.5e-11	7.6e-12	1.1e-16
6	1.00e+00	7.3e-12	6.2e-11	4.4e-08

実は，これはPOPに対するSDP緩和の特徴であり，rに関して，SDP緩和問題の最適値が単調非減少であることが成立する．また，

- $r=5,6$では，近似最適値が1となり，POP(2)の最小値と一致している．また，近似最適解に関する実行可能性も十分小さくなっている．

ところで，本当にこの数値結果は正しいのだろうか．実は，正しくない．5節でその詳細を述べるが，すべてのrでSDP緩和問題$\mathbb{Q}_r$は最小値が0である．このことを検証するためには，POPに対するSDP緩和がどういうものであるか理解する必要がある．

4．POPに対するSDP緩和

この節では，Lasserreによって提案されたPOP(1)に対するSDP緩和[5]を簡単に紹介する．得られるSDP緩和問題において，最適解を見つけることは，ある恒等式を満たす二乗和（SOS[2]）多項式を見つけることと等価である，ということに気づいてほしい．

4.1 概要

POPに対するSDP緩和は，図1のように“モーメント理論，線形化”を用いるか，“SOS多項式”を用いるかで2種類のSDP緩和問題を構成することができる．さらに，それらは，お互いに双対問題にもなっている．本稿では特に，SOS多項式による定式化について紹介する．

LasserreによるPOP(1)のSDP緩和では，POP(1)

[2] Sums Of Squaresの頭文字をとってSOSと略記する．

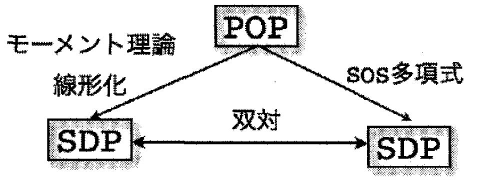

図1　POP に対する 2 種類の SDP 緩和問題

とともに，自然数 r を与えることで SDP 緩和問題を一つ構成することができる．したがって，無限個の SDP 緩和問題を考えることができる．このとき，これらの SDP 緩和問題には次の関係がある：

- SDP 緩和問題の最適値は r に関して単調非減少である．つまり，r でできる SDP 緩和問題の最適値を ρ_r^* とすると，$\rho_r^* \leq \rho_{r+1}^* \leq f^*$ が成立する．ただし，f^* は POP (1)の最小値である．
- Lasserre[5]は，POP がある仮定を満たすという条件のもと，ρ_r^* が f^* に収束する，ということを示している．

この関係から，できるだけ大きな r で SDP 緩和問題を構成し，解くことで POP (1)の最小値 f^* に近い下界値を得ることができる．しかしながら，以下の関係から r を大きくして SDP 緩和問題を構成すると，SDP 緩和問題を解くために多くの時間を費やすことになる．

- SDP 緩和問題のサイズ（変数行列のサイズや等式制約の数など）についても r に関して単調増加性を有している．

文献[5][11]などで数値実験が報告されており，変数 20 個の二次最適化問題に対しては，$r=2, 3$ ぐらいまでが現在の計算機で解けるサイズであるといわれている．

4.2　SOS 多項式と半正定値行列

SOS 多項式による SDP 緩和を紹介する前に，SOS 多項式に関する性質を紹介する．

定義 4.1．多項式 g が，ある多項式 $h_1, \cdots, h_k$ で，$g=\sum_{j=1}^{k} h_k^2$ と書けるとき，g を SOS 多項式と呼ぶ．　□

g が SOS 多項式ならば，すべての $x \in \mathbb{R}^n$ で $g(x)$ は非負の値をとる．しかしながら，一般に逆は成り立たないことが知られている．

SOS 多項式を用いた SDP 緩和では，まず POP を SOS 多項式で緩和し，次に以下の定理を用いて SDP に変換する．

定理 4.2．([9]) 次の 2 つは等価である：(i)多項式 g は $\deg(g)=2r$ で，SOS 多項式である．(ii)ある半正定値行列 $\boldsymbol{V}$ が存在して，$\boldsymbol{x}$ に関する恒等式 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x})$ を満たす．ここで，$\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x}) := (1, x_1, \cdots, x_n, x_1^2, \cdots, x_1^r, \cdots, x_n^r)^T$ であり，次数 0 から次数 r までの単項式を並べた列ベクトルである．　□

証明の代わりに，簡単な例を用いて定理 4.2 を解説する．

例 4.3．$g(\boldsymbol{x})=x_1^2+(x_1x_2-1)^2$ について考える．g は明らかに SOS 多項式であり，g の次数は 4 なので $r=2$ である．一方，$\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})=(1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2)^T$ という順で単項式が並んでいるとする．このとき，$\boldsymbol{h}_1 := (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$，$\boldsymbol{h}_2 := (-1, 0, 0, 0, 1, 0)^T$ とおくと，g は次のように $\boldsymbol{h}_1$，$\boldsymbol{h}_2$，$\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$ を使って記述できる．

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x}) &= (\boldsymbol{h}_1^T \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}))^2 + (\boldsymbol{h}_2^T \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}))^2 \\
&= \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{h}_1 \boldsymbol{h}_1^T) \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{h}_2 \boldsymbol{h}_2^T) \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{h}_1 \boldsymbol{h}_1^T + \boldsymbol{h}_2 \boldsymbol{h}_2^T) \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
$$

最後の式で，$\boldsymbol{V} := \boldsymbol{h}_1 \boldsymbol{h}_1^T + \boldsymbol{h}_2 \boldsymbol{h}_2^T$ とおけば，$\boldsymbol{V}$ は半正定値行列で，定理 4.2 の(ii)を満たしている．　□

4.3　SDP 緩和

POP (1)の実行可能領域 $F := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | f_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \ (j=1, \cdots, m)\}$ と定める．このとき，POP (1)の最小値 f^* は以下の最大値と一致する：

$$
\max \rho \ \text{sub. to} \ f_0(\boldsymbol{x}) - \rho \geq 0 (\forall \boldsymbol{x} \in F). \tag{3}
$$

(3)は，ρ が変数であり，F のすべての要素 $\boldsymbol{x}$ が，不等式 $f_0(\boldsymbol{x}) \geq \rho$ を満たす ρ のうち，最大の ρ を見つける最適化問題である．(3)の制約式に着目すると，$\boldsymbol{x}$ の多項式 $f_0(\boldsymbol{x})-\rho$ が集合 F 上で非負の値をとる多項式である，と見ることができる．SDP 緩和では，この非負性を SOS 多項式で表現することを試みる．

今，ある $\bar{\rho} \in \mathbb{R}$ に対して，$f_0(\boldsymbol{x})-\bar{\rho}$ が SOS 多項式 $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_m$ で，次のように表現できたと仮定する：

$$
f_0(\boldsymbol{x}) - \bar{\rho} = \sigma_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j(\boldsymbol{x}) f_j(\boldsymbol{x}) (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n) \tag{4}
$$

これは，$\boldsymbol{x}$ に関する恒等式である．このとき，SOS 多項式 $\sigma_j(\boldsymbol{x})$ はすべての $\boldsymbol{x}$ で非負の値をとり，$f_j(\boldsymbol{x})$ は F 上で非負の値をとるので，多項式 $f_0(\boldsymbol{x})-\bar{\rho}$ は F 上で非負の値をとる．つまり，$\bar{\rho}$ は(3)において実行可能解となり，(3)の最大値は $\bar{\rho}$ 以上というのがわかる．

そこで，(3)の代わりに，次の最適化問題を考える：

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\max & \rho \\
\text{sub. to} & f_0(\boldsymbol{x}) - \rho = \sigma_0(\boldsymbol{x}) \\
& \quad + \sum_{j=1}^{m} \sigma_j(\boldsymbol{x}) f_j(\boldsymbol{x}) (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n) \\
& \sigma_0, \cdots, \sigma_m : \text{SOS 多項式}.
\end{array}
\right. \tag{5}
$$

(5)の最大値を ρ^* とおくと，$f^* \geq \rho^*$ が成立する．必ずしも等号が成立しないのは，すべての POP で(4)が

成立するとは限らないからである．

さて，我々は定理4.2を知っているので，これを適用すれば，(5)からSDP緩和問題が構成できそうであるが，実はそうではない．なぜなら，(5)において，SOS多項式 σ_j の次数が設定されていないからである．定理4.2の(i)では，"次数 $2r$ のSOS多項式"とあるので，このままでは定理4.2を適用できない．

そこで，(5)においてさらに次数の制限を行う．与えられた正の整数 r に対して，次の最適化問題を考える：

$$\begin{cases} \max & \rho \\ \text{sub.to} & f_0(\boldsymbol{x})-\rho=\sigma_0(\boldsymbol{x}) \\ & \quad +\sum_{j=1}^{m}\sigma_j(\boldsymbol{x})f_j(\boldsymbol{x})(\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n) \\ & \sigma_0,\cdots,\sigma_m:\text{SOS 多項式}, \\ & \deg(\sigma_0)\leq 2r,\deg(f_j\sigma_j)\leq 2r \\ & \quad (j=1,\cdots,m). \end{cases} \tag{6}$$

この最大値を ρ_r^* とおくと，すべての r で，$\rho_r^*\leq\rho^*\leq f^*$ が成立する．また，r が大きくなると，SOS多項式の候補も多くなるので，$\rho_r^*\leq\rho_{r+1}^*$ も成立する．

定理4.2を利用すると，(6)と等価なSDP緩和問題を構成することができる．したがって，SDP緩和問題を解くことは，(6)の恒等式を満たすSOS多項式を見つけることに対応している．この観察が，(2)に対する解析で重要になってくる．

では，実際に定理4.2を(6)に適用する．$j=1,\cdots,m$ に対して，$r_j:=r-\lceil\deg(f_j)/2\rceil$ とおく．すると，定理4.2の(ii)より，(6)と等価な次の最適化問題を得る：

$$\begin{cases} \max & \rho \\ \text{subz to} & f_0(\boldsymbol{x})-\rho=\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x})^T V_0\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{x}) \\ & \quad +\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{u}_{r_j}(\boldsymbol{x})^T V_j\boldsymbol{u}_{r_j}(\boldsymbol{x})f_j(\boldsymbol{x})(\forall\,x\in\mathbb{R}^n) \\ & V_0,\cdots,V_m\succeq O. \end{cases} \tag{7}$$

(7)において，変数は ρ と行列 $V_0,\cdots,V_m$ である．(7)にある恒等式の両辺を比較することで，ρ，$V_0,\cdots,V_j$ に関する $\binom{n+2r}{2r}$ 本の線形方程式を得ることができる．したがって，(7)は以下のSDPと等価であり，このSDPがPOP(1)に対するSDP緩和問題である：

$$\begin{cases} \max & (\rho,V_0,\cdots,V_m\text{ に関する線形式}) \\ \text{sub.to} & (\rho,V_0,\cdots,V_m\text{ に関する線形方程式}), \\ & V_0,\cdots,V_m\succeq O. \end{cases} \tag{8}$$

なお，V_0 と V_j のサイズはそれぞれ，$\binom{n+r}{r}\times\binom{n+r}{r}$ と $\binom{n+r_j}{r_j}\times\binom{n+r_j}{r_j}$ であり，SDP緩和問題(8)は $\binom{n+2r}{2r}$ 本の線形方程式を持っているので，n や r が大きくなると得られるSDP緩和問題のサイズが大きくなることがわかる．

5. 例題に戻って

この節では，SDP緩和問題 $\mathbb{Q}_r$ の解析を行い，なぜPOP(2)の最小値を近似最適値として出力したのか議論する．以下の議論は，すべての r で成立するが簡単のため，$r=3$ でできるSDP緩和問題を考える．このとき，$r_1=r_2=3-\lceil 1/2\rceil=2$ である．前節で指摘した通り，このSDP緩和問題は次の最適化問題と等価である：

$$\begin{cases} \max & \rho \\ \text{sub.to} & x-\rho=\boldsymbol{u}_3(x)^T V_0\boldsymbol{u}_3(x) \\ & \quad +x\boldsymbol{u}_2(x)^T V_1\boldsymbol{u}_2(x) \\ & \quad +(x^2-1)\boldsymbol{u}_2(x)^T V_2\boldsymbol{u}_2(x)(\forall\,x\in\mathbb{R}) \\ & V_0\in\mathbb{S}_+^4,\ V_1,\ V_2\in\mathbb{S}_+^3. \end{cases} \tag{9}$$

ただし，$\boldsymbol{u}_3(x)=(1,x,x^2,x^3)^T$ であり，V_0 は次のように添字が定義されている：

$$V_0=\begin{pmatrix} (V_0)_{00} & (V_0)_{01} & (V_0)_{02} & (V_0)_{03} \\ (V_0)_{01} & (V_0)_{11} & (V_0)_{12} & (V_0)_{13} \\ (V_0)_{02} & (V_0)_{12} & (V_0)_{22} & (V_0)_{23} \\ (V_0)_{03} & (V_0)_{13} & (V_0)_{23} & (V_0)_{33} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_2(x)$ や V_1，V_2 に関しても上と同様に記述する．

さて，(9)の恒等式に着目する．特に，x^6 に関する係数を比較すると，次の線形等式を得る：

$$0=(V_0)_{33}+(V_2)_{22}.$$

$(V_0)_{33}$, $(V_2)_{22}$ がそれぞれ V_0，V_2 の対角要素であり，これらの行列は半正定値でなければならないので，$(V_0)_{33}=(V_2)_{22}=0$ となる．さらに，半正定値性からこれらの対角要素に対応する非対角要素も0となる．つまり，$(V_0)_{i3}=(V_2)_{j2}=0(i=0,1,2,3,j=0,1,2)$ である．

次に，x^5 の係数に着目すると，次の線形等式を得る：

$$0=2(V_0)_{23}+(V_1)_{22}+2(V_2)_{12}.$$

しかし，すでに $(V_0)_{23}=(V_2)_{12}$ が分かっているので，$(V_1)_{22}=0$ である．同様の議論から，$(V_1)_{j2}=0(j=0,1,2)$ がいえる．

さて，この情報を(9)に追加すると，以下の最適化問題を得る：

$$\begin{cases} \max & \rho \\ \text{sub. to} & x-\rho=\boldsymbol{u}_2(x)^T\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{u}_2(x) \\ & +x\boldsymbol{u}_1(x)^T\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{u}_1(x) \\ & +(x^2-1)\boldsymbol{u}_1(x)^T\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{u}_1(x)(\forall x\in\mathbb{R}) \\ & \boldsymbol{V}_0\in\mathbb{S}^3_+,\ \boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2\in\mathbb{S}^2_+. \end{cases} \tag{10}$$

(10)を注意深くみると，これはPOP(2)と$r=2$で構成される(7)である．つまり，(9)と(10)から得られるSDP緩和問題は等価であり，最大値ρ_3^*とρ_2^*は等しいことが分かる．

この操作をx^4，x^3に対して行うと，同様に$\rho_2^*=\rho_1^*$を得る．したがって，ρ_1^*の値がわかれば，ρ_3^*，ρ_2^*もわかる．$r=1$で得られる最適化問題は次の通りである：

$$\begin{cases} \max & \rho \\ \text{sub. to} & x-\rho=\boldsymbol{u}_1(x)^T\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{u}_1(x)+xV_1 \\ & +(x^2-1)V_2(\forall x\in\mathbb{R}) \\ & \boldsymbol{V}_0\in\mathbb{S}^2_+,\ V_1,\ V_2\geq 0. \end{cases} \tag{11}$$

V_1，V_2は1×1の半正定値対称行列なので，これは非負変数となる．また，$u_0(x)=1$である．

(11)の恒等式に着目して，x^2の係数を比較することで，$(V_0)_{11}=(V_0)_{01}=V_2=0$を得る．これらを代入して簡略化すると，(11)は次の最適化問題と等価になる：

$$\begin{cases} \max & \rho \\ \text{sub. to} & 1=V_1,\ -\rho=(V_0)_{00},\ (V_0)_{00},\ V_1\geq 0. \end{cases} \tag{12}$$

(12)は線形計画問題となり，最大値が0であることが容易に分かる．したがって，$\rho_3^*=\rho_2^*=\rho_1^*=0$である．もう一度，表1，2に注目してほしい．$r=5,6$では，明らかに0とは異なる値が近似最適値として得られている．

では，なぜこのような結果になってしまったのだろうか？ SeDuMiやSDPAにバグがあってこのような結果になってしまったのだろうか？ SDP緩和問題ではなく，(7)の恒等式に着目することで，この疑問に答えることができる．

定理5.1. ([15])任意の$\epsilon>0$に対して，ある$\bar{r}$が存在して$r\geq\bar{r}$となるrに対して，以下の恒等式を満たす次数$2r$以下のSOS多項式σ_0，σ_1，σ_2が存在する：

$$x+\epsilon x^{2r}-1=\sigma_0(x)+x\sigma_1(x)$$
$$+(x^2-1)\sigma_2\quad(\forall x\in\mathbb{R}).$$

今までの議論をまとめると，次のことがわかる：

(A) どんなrを選んでも，次の恒等式を満たす次数$2r$以下のSOS多項式σ_0，σ_1，σ_2は存在しない：
$$x-1=\sigma_0(x)+x\sigma_1(x)+(x^2-1)\sigma_2(x).$$

(B) 一方，定理5.1より，あるrにおいて，次の恒等式を満たす次数$2r$以下のSOS多項式σ_0，σ_1，σ_2は存在する：
$$x+\epsilon x^{2r}-1=\sigma_0(x)+x\sigma_1(x)+(x^2-1)\sigma_2(x).$$

これらの事実をSDPの言葉で書くと次のようになる．rで得られるSDP緩和問題を以下のように書くことができる：

$$\begin{cases} \max & \sum_{k=0}^{2}(\boldsymbol{F}_{0,k})\cdot\boldsymbol{V}_k \\ \text{sub. to} & \sum_{k=0}^{2}\boldsymbol{F}_{j,k}\cdot\boldsymbol{V}_k=c_j(j=1,\cdots,2r), \\ & \boldsymbol{V}_0\in\mathbb{S}^{r+1}_+,\ \boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2\in\mathbb{S}^r_+. \end{cases} \tag{13}$$

ここで，$\boldsymbol{F}_{i,k}(i=0,1,2,k=0,\cdots,2r)$は定数行列である．このSDP緩和問題(13)が$r$に依存していることに注意してほしい．

(A) どんなrを選んでSDP緩和問題(13)を構成しても，目的関数値$\sum_{k=0}^{2}(\boldsymbol{F}_{0,k})\cdot\boldsymbol{V}_k$が1になる実行可能解が存在しない．

(B) 与えられた$\epsilon>0$に対して，あるrでできるSDP緩和問題(13)では，c_{2r}だけを0からϵに摂動すると，目的関数値$\sum_{k=0}^{2}(\boldsymbol{F}_{0,k})\cdot\boldsymbol{V}_k$が1になる実行可能解が存在する．

この結論より，POP(2)から得られるSDP緩和問題は非常に摂動に弱く，微小な摂動によって得られる結果が大きく変わる，ということが分かる．文献[15]ではSDPA-GMPでこのSDP緩和問題を解いているが，$r=6$の場合，有効桁数として10進約300桁取ることでSDP緩和問題の最小値である0に近い近似最適値が得られることを報告している．

6. おわりに

本稿では，POP(2)から得られるSDP緩和問題を通じて，POPに対するSDP緩和を紹介した．疎構造を利用した手法などが提案されているが，現状では，変数の数が50以上を超えるPOPに対するSDP緩和は，大規模になり解くことが難しいとされている．“現実問題への適用”というのは，大きな課題である．

POPやSOS多項式を通じて，本稿で扱ったSDPが微小な摂動に大きく影響される，という事実を理解することができた．このことから，いくら精度の高い計算を行っても，数値誤差が発生する限りこのSDPの最小値を求めることが非常に難しいことがわかる．文献[13]では，SDPの幾何的構造に着目したFacial Reduction Algorithm[1]と5節で適用した手法の関連について議論している．また，文献[14]では，この

手法を一般の POP でも適用できるように拡張している.

一方，POP (2)の最小値が得られているので，この数値的難しさを悲観しなくてもよいかもしれない．誤差を利用して，つまり SDP 緩和問題を正確に解かないで，POP (1)の最小値を求められればよいのである．このことを保証するためには，定理 5.1 のような定理が，一般の POP (1)に対して成り立つことが示せればよいのだが，筆者の知る限りそれはまだわかっていない.

謝辞　原稿を注意深く読んで誤りを指摘してくれた電気通信大学修士 2 年生の新井聡史くんに感謝します.

参考文献

[1] J. M. Borwein and H. Wolkowicz, "Facial reduction for a cone-convex programming problem," Journal of the Australian Mathematical Society, Vol. 30, pp. 369-380 (1981).

[2] GLOBALLIB, available from http://www.gamsworld.org/global/globallib/globalstat.htm

[3] D. Henrion and J. B. Lasserre, "GloptiPoly : Global optimization over polynomials with Matlab and SeDuMi," ACM Transactions Math. Soft. 29 : 165-194, 2003. Available from http://homepages.laas.fr/henrion/software/gloptipoly2/

[4] 小島政和, 脇隼人, "多項式最適化問題に対する半正定値計画緩和," システム/制御/情報, 48 (12), 447-482 (2004).

[5] J. B. Lasserre, "Global optimization with polynomials and the problems of moments," SIAM J. Optim., 11 (2001) 796-817.

[6] J. B. Lasserre, "Moments, Positive Polynomials and Their Applications," Imperial College Press Optimization Series Vol. 1, Imperial College Press (2009).

[7] M. Laurent, "Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials," In Emerging Applications of Algebraic Geometry, M. Putinar and S. Sullivant editors, 157-270, Springer (2009).

[8] 村松正和, "多項式計画と錐線形計画—非線形計画への線形計画からのアプローチ," システム/制御/情報, 50 (9), 223-228 (2006).

[9] P. A. Parrilo, "Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems," Math. Program., 96, 293-320 (2003).

[10] S. Prajna, A. Papachristodoulou, P. Seiler and P. A. Parrilo, "SOSTOOLS (Sums of squares optimization toolbox for MATLAB) User's guide," available from http://www.cds.caltech.edu/sostools/

[11] H. Waki, S. Kim, M. Kojima and M. Muramatsu, "Sums of Squares and Semidefinite Programming Relaxations for Polynomial Optimization Problems with Structured Sparsity," SIAM J. Optim., 17, 218-242 (2006).

[12] H. Waki, S. Kim, M. Kojima, M. Muramatsu and H. Sugimoto, "SparsePOP : a Sparse SDP Relaxation of Polynomial Optimization Problems," ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 35 (2), 15 (2008). Available from http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP

[13] H. Waki and M. Muramatsu, "Facial reduction algorithms for conic optimization problems," preprint, 2009. Available from http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2009/07/2355.html

[14] 脇隼人, 村松正和, "The Infeasibility of SDP Relaxation Problems for Polynomial Optimization Problems," 最適化：モデリングとアルゴリズム, 口頭発表, 統計数理研究所 (2010).

[15] H. Waki, M. Nakata and M. Muramatsu, "Strange Behaviors of Interior-point Methods for Solving Semidefinite Programming Problems in Polynomial Optimization," to appear in Compt. Optim. Appl.. Available from http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2008/08/2065.html