

半正定値計画問題に対するソルバーの紹介

福田 光浩

半正定値計画問題 (SDP) を解くソルバーは数多く存在する。しかし、ソルバーの最新情報に常に接していなければ、実際に使おうとしたときに、どのソルバーが一番使いやすく、自分のニーズに合っているのかわかりにくいものである。本稿では現時点で開発とメンテナンスが継続されている 14 本のソフトウェアを紹介し、それぞれの機能と性能について抜粋をし一覧としてまとめた。また、SDP を解く際に重要な定式化、入力データの形式についても簡単に解説を行った。

キーワード：半正定値計画問題、ソルバー、ソフトウェア

1. はじめに

半正定値計画問題 (SDP) と聞けば一昔前までは難しいというイメージがあった¹。SDP に対する代表的なアルゴリズムである内点法が提案された 1990 年代には確かに、パス追跡法、ポテンシャル減少法、斉次自己双対定式化、20 以上の探索方向など多様な研究発展があり、かなりの予備知識がなければ SDP の研究に携わること自体が難しかった。しかし、そういった発展から SDP を解く効率的なアルゴリズムが確立され、SDP ソルバーも 10 年前では想像できないような大規模問題を解けるようになった。今や線形計画問題 (LP) 同様にデータを生成すれば、アルゴリズムの詳細を理解しなくても SDP 関連の研究や応用事例を行えるまでになった。

本号の特集は SDP を教育、研究、応用の題材として普及させるために企画されたものであるが、ここでは SDP ソルバーを取り上げる。

もともとは、数ある SDP ソルバーの中でも代表格として知られているものを網羅し、それぞれの特徴を書く心積もりであった。しかし、調べれば調べるだけ SDP ソルバーの情報は多岐にわたっている。ここでは多少曖昧なものになることを認識しつつも、紙幅の都合から、それぞれの代表的な性質を抜粋することとした。

後半部分では SDP ソルバーを使用するに当たり共

通して注意すべきデータ入力形式、定式化、データの前処理、ソルバーの終了条件などについて簡単に紹介する。

2. SDP ソルバー

一般的に公開されている SDP ソルバーもしくは購入可能なものを次のラフな分類に従って順次紹介したい。2.1 汎用 SDP ソルバー、2.2 商用 SDP ソルバー、2.3 高精度 SDP ソルバー、2.4 並列 SDP ソルバー、2.5 特殊構造に適した SDP ソルバー、2.6 SDP ソルバー支援システム。なお、ここで紹介するソルバーの情報は執筆時点におけるマニュアルやオンライン情報などを元にしたが、これらは今後のアップデートで変更されることがある。また、これらのソルバーは計算機の性能を引き出せるように計算機環境に著しく依存することがあるため、インストールするにはそれぞれのインストールマニュアルを参照されたい。

2.1 汎用 SDP ソルバー

ここではオープンソースな汎用 SDP ソルバー、特に研究用に開発されたものを中心に取り上げる。

● SDPA 7.3.1

最新リリース：2009 年 7 月 29 日

開発者：小島政和、小林和博、中田和秀、中田真秀、福田光浩、藤澤克樹、二方克昌、山下真実
実装アルゴリズム：パス追跡主双対内点法 (HRVW/KSH/M 探索方向)

インタフェース：C/C++、MATLAB

詳細情報：<http://sdpa.indsys.chuo-u.ac.jp/>

ふくだ みつひろ

東京工業大学 大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻

〒152-8552 目黒区大岡山 2-12-1

¹ 私が学生時代には少なくともそうであった。

sdpa

勧められる所：現時点では最も速く、メモリー消費も少ないソルバー[11].

改善が求められる所：2次錐計画問題², 対数行列式問題, 低ランク行列制約[1], 自由変数(上限と下限制約がない変数)などを含んでいる問題が統一的に解けない.

- **SeDuMi 1.21**

最新リリース：2009年5月14日

開発者：COR@L チーム

実装アルゴリズム：パス追跡主双対内点法 (NT探索方向)

インタフェース：MATLAB, Octave³

詳細情報：<http://sedumi.ie.lehigh.edu>

勧められる所：数値的に安定していると定評。SDPの他に2次錐計画問題, 複素数変数や自由変数にも対応している.

改善が求められる所：MATLABに依存している分, 大規模な問題ではメモリー不足に陥りやすい.

- **SDPT 3 4.0β**

最新リリース：2009年2月6日

開発者：K.-C. Toh, R. H. Tütüncü, M. J. Todd

実装アルゴリズム：パス追跡主双対内点法 (HRVW/KSH/M, NT探索方向)

インタフェース：MATLAB

詳細情報：<http://www.math.nus.edu.sg/~mat-tohkc/sdpt3.html>

勧められる所：SDPの他に2次錐計画問題, 対数行列式問題, 低ランク行列制約, 自由変数にも対応している.

改善が求められる所：MATLABに依存している分, 大規模な問題ではメモリー不足に陥りやすい.

- **CSDP 6.1.1**

最新リリース：2010年4月9日

開発者：B. Borchers

実装アルゴリズム：パス追跡主双対内点法 (HRVW/KSH/M探索方向)

インタフェース：C/C++, MATLAB, Octave, R

詳細情報：<https://projects.coin-or.org/Csdp>

勧められる所：OctaveやRからもSDPソルバーを呼び出せる.

改善が求められる所：特定の疎性を持ったSDP(具体的には疎性を持ったSchur補完行列)が不得手.

- **CVXOPT 1.1.2**

最新リリース：2010年1月1日

開発者：J. Dahl, L. Vandenberghe

実装アルゴリズム：パス追跡主双対内点法 (NT探索方向)

インタフェース：Python, C, Python (x, y)⁴, CVXMOD⁵

詳細情報：<http://abel.ee.ucla.edu/cvxopt>

勧められる所：外部ソルバーとしてGLPK, MOSEK, DSDP⁶等を用いることもできる.

改善が求められる所：Python 2系列が要求される⁷.

2.2 商用SDPソルバー

この両ソルバーは事例の解決システムの一部としても販売されている.

- **NUOPT V 12**

最新リリース：2010年3月1日

開発元：株式会社 数理システム

実装アルゴリズム：ポテンシャル減少主双対内点法 (HRVW/KSH/M探索方向)

インタフェース：SIMPLE

詳細情報：<http://www.msi.co.jp/nuopt>

勧められる所：SDP以外にも, 非線形SDP, 混合整数計画問題, 一般非線形計画問題, 2次錐計画問題などにも対応している. また専用モデリング言語SIMPLEが付属しており, それらの導入が容易.

改善が求められる所：SIMPLE以外のインタフェースが無く, このため超大規模問題が扱えないことがある.

- **PENNON 0.9 (PENSDP 2.2)**

最新リリース：不明

開発元(開発者)：PENOPT GbR (M. Kočvara,

² SDPAの2次錐計画問題対応版SDPA-SOCPは近日公開予定.

³ SeDuMi 1.1R3のみ.

⁴ <http://www.pytonxy.com>のスタンダードplug-inとして使える.

⁵ <http://cvxmod.net>参照.

⁶ 2006年で開発は断念されているので本稿では扱わない.

⁷ 最新のPython 3系列には対応できていない.

M. Stingl)

実装アルゴリズム：一般拡張ラグランジュ法

インタフェース：MATLAB, C, fortran

詳細情報：<http://www.penopt.com>

勧められる所：SDP以外にも非線形SDP, BMI, 一般非線形計画問題にも対応している。

改善が求められる所：研究用のコードは限定的に無償で提供してもらえが、手続きが少しだけ面倒。

2.3 高精度SDPソルバー

これらのソルバーは実装しているアルゴリズムのすべての演算が高精度で行われているので高精度の最適解と最適値が求められる。

- **SDPA-GMP 7.1.2, SDPA-QD 7.1.2, SDPA-DD 7.1.2**

最新リリース：2009年10月5日

開発者：中田真秀, 小島政和, 小林和博, 中田和秀, 福田光浩, 藤澤克樹, 二方克昌, 山下真

実装アルゴリズム：パス追跡主双対内点法 (HRVW/KSH/M探索方向)

インタフェース：C/C++, MATLAB

詳細情報：<http://sdpa.indsys.chuo-u.ac.jp/sdpa>

勧められる所：現存する唯一のSDPを任意精度 (SDPA-GMP), 疑似4倍精度 (SDPA-QD), 疑似8精度 (SDPA-DD) で解けるソフト。

改善が求められる所：すべての演算が高精度で行われているので計算速度で劣る。

2.4 並列SDPソルバー

SDPARA 7.2.1, PCSDP 1.0 R1が開発されている。この他にPDSDP 5.8も存在するが、しばらくの間メンテナンスされていないので、ここでは扱わない。

- **SDPARA 7.2.1**

最新リリース：2009年1月9日

開発者：小島政和, 小林和博, 中田和秀, 中田真秀, 福田光浩, 藤澤克樹, 二方克昌, 山下真

実装アルゴリズム：パス追跡主双対内点法 (HRVW/KSH/M探索方向)

インタフェース：スタンドアロンのみ

詳細情報：<http://sdpa.indsys.chuo-u.ac.jp/sdpa>

勧められる所：近日公開される最新版7.3.1はさらに高速化されている。

改善が求められる所：インストールが計算機環

境によっては大変。

- **PCSDP 1.0 R1**

最新リリース：2007年2月1日 (?)

開発者：I. D. Ivanov

実装アルゴリズム：パス追跡主双対内点法 (HRVW/KSH/M探索方向)

インタフェース：スタンドアロンのみ

詳細情報：<http://lyrawww.uvt.nl/~edeklerk/PCSDP>

勧められる所：特定の応用問題に限れば、SD-PARAよりも数値精度で上回る。

改善が求められる所：2の冪乗などの並列ノード数でないと解けないことがある。

2.5 特殊構造に適したSDPソルバー

ここで紹介する2つのソルバーは疎性を有した特別な構造を持った問題に対して高速なものである。

- **SDPARA-C 1.0.1**

最新リリース：2004年11月

開発者：小島政和, 小林和博, 中田和秀, 中田真秀, 福田光浩, 藤澤克樹, 二方克昌, 山下真

実装アルゴリズム：パス追跡主双対内点法 (HRVW/KSH/M探索方向)

インタフェース：スタンドアロンのみ

詳細情報：<http://sdpa.indsys.chuo-u.ac.jp/sdpa>

勧められる所：組合せ最適化問題のSDP緩和などに対して高速。

改善が求められる所：疎性が十分でないとSD-PARAよりも遅くなる。

- **SDPLR 1.03-β**

最新リリース：2009年6月30日

開発者：S. Burer, R. D. C. Monteiro, C. Choi

実装アルゴリズム：拡張ラグランジュ法

インタフェース：MATLAB

詳細情報：<http://dollar.biz.uiowa.edu/~burer/doku.php?id=soft>

勧められる所：組合せ最適化問題のSDP緩和などに対して高速。

改善が求められる所：実装しているアルゴリズムの性質上、終了条件の一つである双対ギャップが余り小さくならなくても強制終了する場合が多い。

2.6 SDPソルバー支援システム

SDPA Online Solver と NEOS Server for Optim-

ization は www を介した無償の SDP 計算システムである。一方, SparseCoLO は汎用 SDP を, YALMIP は制御理論由来の SDP をソルバーに適した入力形式に変換するソフトウェアである。

● **SDPA Online Solver**

開発者：藤澤克樹, 長田康孝, 笹島啓史, 安井雄一郎, 高宮安仁

詳細情報：http://sdpa.indsys.chuo-u.ac.jp/portal および http://laqua.indsys.chuo-u.ac.jp/portal

勧められる所：SDPA 7.3.0, SDPA 7.3.2, SDPARA 7.3.1, SDPARA-C 1.0.1などを自分でインストールしなくても無償で解いてくれるシステム, 並列計算環境も提供されているので, 大規模な SDP も手軽に解くことができる。

改善が求められる所：一般的に余り知られていないため, フルに利用されていない。

● **NEOS Server for Optimization**

開発者：NEOS Server Group

詳細情報：http://www-neos.mcs.anl.gov

勧められる所：SDPA, SDPA-DD, SDPA-QD, SDPA-GMP, CSDP, DSDP, PENBMI, PENSDP, SDPLR, SDPT3, SeDuMiなどを自分でインストールしなくても無償で解いてくれるシステム。

改善が求められる所：並列 SDP ソルバーなどが使用できない。

● **SparseCoLO V 112**

開発者：藤澤克樹, Kim Sunyoung, 小島政和, 岡本吉央, 山下真

詳細情報：http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparseCoLO/SparseCoLO.htm

勧められる所：4通りの問題変換ができるので, 疎性や構造がある多項式最適化問題から由来す

る SDP などに対してはかなり有効に働く。

改善が求められる所：ある程度経験がなければ, すべての変換を行ってからでないとの方法が一番良いのか分からない。

● **YALMIP R 20090505**

開発者：J. Löfberg

詳細情報：http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip

勧められる所：SDPA, CSDP, DSDP, SDPLR, SDPT3, SeDuMi, PENNON, PENBMI, PENSDP, LMILABなどのラップ。

改善が求められる所：使用したいソルバーをあらかじめインストールする必要がある。

3. どのソルバーを選ぶべきか

前節では, 代表的な SDP ソルバー 14 本を紹介したが, 「一番良いソルバー」の選択が難しい。しかし, 「フリーやオープンソースなコードにこだわりたい」, 「サポートが万全で自社開発の商用ソフトに組み入れたい」, 「試しに小さな例題を解きたい」, 「大規模な SDP 問題を想定しているので, それに合わせて準備をしたい」等々とニーズによって, おおよその見当がつくであろう。また, 表1にごく簡単ではあるが, 前節で取り上げた SDP ソルバーの機能を比較した。

インストールのしやすさ, MATLAB, Python 環境の必要性なども1つの目安となる。とはいえ, ほとんどのニーズには2.1節の「汎用 SDP ソルバー」で十分に対応できるため, 実用上はまずこれらをお勧めする。

SDP ソルバーのベンチマーク問題に対する比較として Hans D. Mittelmann の Benchmark for Optimization Software[8]が有名であり, ここの結果を参考にすることもできる。また, 最近, 我々のグループで SDPA 7.3.1, SeDuMi 1.21, SDPT3 4.0β,

表1 SDP ソルバーの機能や性能の比較

ソルバー名	インストールのしやすさ	計算速度	数値安定性	メモリー消費	呼出しライブラリー	2次錐計画問題	自由変数	対数行列式問題	低ランク行列制約	複素数変数	一般非線形計画問題
SDPA 7.3.1	○	◎	○	○	有	×※	○	×	×	×	×
SeDuMi 1.21	◎	○	◎	△	有	○	○	×	×	○	×
SDPT3 4.0β	◎	○	○	○	有	○	○	○	○	×	×
CSDP 6.1.1	◎	○	○	○	有	×	×	×	×	×	×
CVXOPT 1.1.2	△	?	?	?	有	○	○	△	×	×	○
NUOPT V12	◎	○	○	○	無	○	○	△	×	×	○
PENNON 0.9	◎	○	○	○	有	○	?	△	×	×	○
SDPA-GMP 7.1.2	○	△	◎	○	無	×	×	×	×	×	×
SDPA-QD 7.1.2											
SDPA-DD 7.1.2											
SDPARA 7.2.1	△	◎	○	◎	無	×	×	×	×	×	×
PCSDP 1.0R1	△	◎	○	◎	無	×	×	×	○	×	×
SDPARA-C 1.0.1	△	◎	○	◎	無	×	×	×	×	×	×
SDPLR 1.03-β	○	◎	○	◎	有	×	×	×	○	×	×

※ SDPA の2次錐計画問題対応版 SDPA-SOCP は近日公開予定。

CSDP 6.1.0 の比較実験を行った[11]。問題を我々で選定したということもあるが、実行時間に関して SDPA<SeDuMi, SDPT3<CSDP の順に短い (小さい) という結論が得られた。

大規模な SDP を解く場合、メモリーオーバーヘッドが大きい MATLAB 依存のソルバーである SeDuMi と SDPT3 は一般的には避けたい。また、解の精度が要求されない場合は SDPLR, そして並列計算環境が整っていれば SDPARA などがお勧めである。

SDP を含む一般非線形計画問題を解く場合、CVXOPT, NUOPT, PENNON に限られてしまう。その中で NUOPT は自動微分付属のモデリング言語があるため、SDP を含めた (非線形) 制約の記述が簡単にできる。

全体的な傾向としては以上であるが、文献[8][11]を綿密に分析すると、特殊なクラスや応用問題によっては特定の SDP ソルバーが非常に適している場合があることが分かる。もし余裕があれば、自身の SDP に最も適したソルバーを決めるために最新のソルバーを用いて、あらかじめ小規模な問題で比較実験をすることを勧めする。

どのアルゴリズムを用いても数値的な不安定性に陥りやすい SDP に対しては、高精度演算を実装した SDP ソルバーが不可欠になってきている[9][10]。本特集の中田真秀氏による「半正定値計画法に対する高精度・安定計算の技術」と脇隼人氏による「多項式最適化問題に対する半正定値計画緩和」により詳しく書かれている。そういったレアケースには SDPA-GMP, SDPA-QD, SDPA-DD を使用されたい。

4. データ入力形式

SDP ソルバーが多数あること、また、それぞれのソルバーの独立した開発過程から、それらのデータ入力形式は残念ながら統一されていない。

一番古くから存在する「SDPA フォーマット」はテキストベースのファイルが入力データとなっている。その他に、バイナリファイルを用いる「SeDuMi フォーマット」と「SDPT3 フォーマット」が一般的に普及している。また多くのソルバーにはこれら3つの形式を変換するプログラムも同梱されている。

最近では NUOPT が使用するモデリング言語 SIMPL のインタフェースもある。さらにもう一步踏み込んだ自由な変更が可能な SparseCoLO[5]や YALMIP[6]もある。疎性がある SDP 問題に関しては

SDPARA-C を用いる他に SparseCoLO を前処理に用いることも勧められる。

5. 主問題と双対問題としての定式化

SDP は一般的に主双対内点法で解かれるので、当り前であるが主問題と双対問題が登場してくる。そこで「あなたは主問題として定式化していますか、双対問題として定式化していますか」と聞かれると一瞬戸惑いが生じてしまうかもしれないが、実はここが SDP を解くに当たって最も重要なポイントといっても過言ではない。一見、分かりづらいかもしれないが、かの有名なグラフの最大カット問題の SDP 緩和を考えてみよう。数学的な定式化は以下の通りである。

$$\begin{cases} \text{最大化} & C \cdot X \\ \text{条件} & E_{ii} \cdot X = 1, (i=1, 2, \dots, n) \\ & S^n \ni X \geq 0. \end{cases}$$

ここで E_{ii} は (i, i) 成分だけが1, それ以外はすべて0の行列を表す。この問題を SDPA でいう双対問題として定式化すると制約の数 m は n 本, 変数行列のサイズは $n \times n$ となる。しかし、同じ問題を主問題として定式化すると制約の数 m は $n(n+1)/2$ 本, 変数行列のサイズは $n \times n$ と変わらないが $2n$ 次元の対角行列変数が追加が必要となる。文献[3]には $n=100$ の問題が前者は0.18秒で解けたのに対し、後者は201.3秒で解けたことが記されている!

著者が長年携わってきた量子化学における電子構造計算の SDP 近似をもうひとつの例として取り上げてみる[4]。ここで登場する SDP も双対問題として定式化するのが自明であるが、現存する計算機クラスタでも解けないような規模の問題ができあがる。一方、主問題として定式化することにより、全く同じ問題が SDPARA で解けてしまうので全く不思議ともいえる。このように気が付けば簡単なことであるが、実は必要以上に大きな問題を解いている可能性もある。

6. 前処理

線形計画問題 (LP) に対して、入力データの前処理に関する研究と実装は古くから行われてきたが、SDP に対してはまだ始まったばかりである。de Klerk が最近、前処理について触れているが[2], 大雑把にいうと3種類の前処理があるといえる。(A)データの疎性を固定されたものと見て、(非ゼロな値を持つ) データの位置を入れ替えたり、データを表現する基底を変えたりする前処理。(B)データの疎性を構造的

な対称性と見なして代数的な変換によって不変であるという性質から来る前処理。(C)SDPの線形制約式が低ランク(特に2以下)行列である場合,内点法の計算が簡略化できるので,制約行列のランクをあらかじめ計算する前処理。

この分類に従えば,(A)の実装はSDPARA-Cが包括的に含んでいる他,SparseCoLO[5],YALMIP[6]がすでに一部を行っている。(B)に関してはまだ研究段階であり,ソフトウェアとして公開されていないが,(C)はSDPT3,SDPLR,PCSDPが行っている。

個々のソルバーには内点法の初期点を決める発見的な手法やデータのスケーリングなど多々あるが,決定的なものではなく,今後の研究課題として発展が望まれる。

7. 終了条件など

最後に,SDPソルバー間の厳密な比較をするに当たって避けることができないのが終了条件の議論である。本特集の中田和秀氏の「半正定値計画の問題記述&解決能力」でも触れられているが,SDP(の主問題と双対問題)を解こうとしたとき, (x, X, Y) が最適解の候補だとすると,この点に対して主問題の実行可能誤差,双対問題の実行可能誤差,そして主問題と双対問題の最適値の誤差を評価する。つまりこの3つの値が数値的にゼロに近いときに最適解の近似であると判断する。当然ながら,人それぞれに厳密さの基準値は異なるので,SDPソルバーもそれぞれもってもらいたい基準を用いている。

2000年に行われた7th DIMACS Implementation Challenge⁸では当時存在していたSDPソルバーを公平な基準で比較するため,DIMACS errorsという基準が導入された[7]。2節で紹介したSDPソルバーの一部もオプションでDIMACS errorsを出力することもできるようになっている。

8. おわりに

今回はSDPが解けるというソルバーに限定した。しかし,実際に解きたい問題はその他に線形計画問題,2次錐計画問題,一般非線形計画問題,非線形SDPなどからなる最適化問題であることが多い。今後,そのような総合的なSDPソルバーの需要が望まれるの

ではないかと思われる。

謝辞 本稿の執筆に当たり助言を下された山下真氏,そして情報提供などにご協力下された(株)数理システムの原田耕平氏に感謝いたします。

参考文献

- [1] S. J. Benson, Y. Ye and X. Zhang, “Solving large-scale sparse semidefinite programs for combinatorial optimization,” *SIAM Journal on Optimization*, 10 (2000) pp. 443-461.
- [2] E. de Klerk, “Exploiting special structure in semidefinite programming: A survey of theory and applications,” *European Journal of Operational Research*, 201 (2010) pp. 1-10.
- [3] K. Fujisawa, M. Fukuda, K. Kobayashi, M. Kojima, K. Nakata, M. Nakata and M. Yamashita, “SDPA (SemiDefinite Programming Algorithm) user’s manual—version 7.1.0,” Research Report B-448, Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, 2008.
- [4] M. Fukuda, M. Nakata and M. Yamashita, “Semidefinite programming: Formulations and primal-dual interior-point methods,” in D. A. Mazziotti (ed.), *Reduced-Density Matrix Mechanics: With Application to Many-Electron Atoms and Molecules* (John Wiley & Sons, Inc., 2007).
- [5] S. Kim, M. Kojima, M. Mevissen and M. Yamashita, “Exploiting sparsity in linear and nonlinear matrix inequalities via positive semidefinite matrix completion,” Research Report B-452, Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, January 2009. ソフトウェアに関しては <http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparseCoLO/SparseCoLO.htm> を参照。
- [6] J. Löfberg, “Dualize it: Software for automatic primal and dual conversions of conic programs,” *Optimization Methods & Software*, 24 (2009) pp. 313-325. ソフトウェアに関しては <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/> を参照。
- [7] H. D. Mittelmann, “An independent benchmarking of SDP and SOCP solvers,” *Mathematical Programming, Series B*, 95 (2003) pp. 407-430.
- [8] H. D. Mittelmann, “Benchmark for Optimization Software,” <http://plato.asu.edu/bench.html>.
- [9] H. D. Mittelmann and F. Vallentin, “High accuracy semidefinite programming bounds for kissing num-

⁸ <http://dimacs.rutgers.edu/Challenges/Seventh>.

- bers," *Experimental Mathematics* 掲載予定.
- [10] H. Waki, M. Nakata and M. Muramatsu, "Strange behaviors of interior-point methods for solving semidefinite programming problems in polynomial optimization," *Computational Optimization and Applications* 掲載予定.
- [11] M. Yamashita, K. Fujisawa, K. Nakata, M. Nakata, M. Fukuda, K. Kobayashi and K. Goto, "A high-performance software package for semidefinite programs: SDPA 7," Research Report B-460, Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, January 2010.