

信用リスクモデル

室町 幸雄

1. 概要

信用リスク (credit risk) とはデフォルト (default, 債務不履行) に起因するリスクの総称で, 信用リスクモデルと呼ばれるものは3種類ある。信用リスクのある証券の価格付けモデル, 企業のデフォルト確率を推定するモデル, ポートフォリオの信用リスクを計測するモデルである。本稿では, これらをプライシングモデル, デフォルト確率推定モデル, ポートフォリオモデルと呼ぶ。これらは単体でも使われるが, 適宜組み合わせても使われる。例えば, デフォルト確率推定モデルとポートフォリオモデルを組み合わせると信ポートフォリオの信用リスクを計測することもあれば, プライシングモデルとポートフォリオモデルを組み合わせると証券化商品を価格付けすることもある。

2. 詳説

2.1 プライシングモデル

信用リスクのある証券の価格は, 将来のデフォルト確率 (PD, Probability of Default) とデフォルト時の損失率 (LGD, Loss Given Default) を反映して決まる。例えば, 信用リスクのある満期 T , 額面1の割引債の無裁定価格は,

$$p(0) = \tilde{E}[1_{\{\tau > T\}}D(T) + 1_{\{\tau \leq T\}}\delta(\tau)D(\tau)]$$

で与えられる。ただし, $D(t)$ は時刻 t における確率的割引関数, τ はデフォルト時刻, \tilde{E} はリスク中立確率 \tilde{P} 下の期待値で, デフォルト時 $\tau < T$ には即座に回収率 $\delta(t)$ だけ受け取れるものとした。そこで, 何らかの形で PD と LGD を与えれば, この種の証券の理論価格を算出できる。本稿では, 信用リスクのある証券の価格付けモデルをプライシングモデルと総称する。プライシングモデルは構造モデル (structural model) と誘導モデル (reduced form model) に大別される。

構造モデルでは, 企業価値の将来変動を確率モデルで与え, それから内生的に生じるデフォルトとその影響について議論する。例えば, 資産価値の変動を確率微分方程式で表現し, 資産価値が負債価値を下回ることをデフォルトと定義する。これは貸借対照表を想定したモデルであり, 「資産=資本+負債」が常に成り立つと考えて, 資本の消失をデフォルトとみなしている。将来の PD は, 設定した確率モデルを解析すれば算出できる。LGD は別途仮定するか, あるいは設定した確率モデルから導出される。こうして得られる PD と LGD を用いれば, 信用リスクのある証券 (典型的には社債) の理論価格を算出できる。資産価値 $A(t)$ は

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \mu(t)dt + \sigma(t)dz(t)$$

といった確率微分方程式で表現されることが多い。ここで, $z(t)$ は標準ブラウン運動である。

代表的な構造モデルは Black-Scholes (Merton) モデル, Black-Cox モデルである。前者はある定められた満期 T でのみデフォルトが発生するモデルで, 資産価値 $A(T)$ の分布と負債価値 K から $PD = P\{A(T) \leq K\}$ などが得られる。後者は, 資産価値 $A(t)$ が初めてデフォルト境界 $K(t)$ に達したときにデフォルトが発生するモデルで, デフォルトは満期 T までの任意の時点で発生しうる。この場合の PD はブラウン運動の初到達時間の分布を求めることで得られる。

誘導モデルでは, デフォルトの発生頻度を確率モデルとして与え, その影響について議論する。PD (あるいはハザード率) と LGD が与えられれば, そのもとで将来キャッシュフローの現在価値を考えることにより, 信用リスクのある証券の理論価格を算出できる。誘導モデルは PD を与えるモデルと信用格付けの推移確率を与えるモデルに大別され, さらに前者は LGD の設定により, Recovery of Treasury (RT), Recovery of Market Value (RMV), Recovery of Face Value (RFV) に分けられる。後者の代表的なモデルは Jarrow-Lando-Turnbull モデルである。ま

むろまち ゆきお
 首都大学東京 大学院社会科学研究所
 〒192-0397 八王子市南大沢 1-1

た、構造モデルと誘導モデルを組み合わせたモデルも提案されている。

2.2 デフォルト確率推定モデル

デフォルト確率推定モデルの先駆けは Altman らの多変量判別分析を用いた研究である。彼らは、多くの共変量（財務指標や市場データ）をもとに、多変量判別分析を用いて多数の企業をデフォルト企業群と非デフォルト企業群に判別するモデルについて研究した。このモデルでは、共変量の一次関数で表現されるスコアの値によりデフォルト/非デフォルトを判別する。

スコアを PD へ読み替えるものが一般化線形モデルである。このモデルでは、PD を共変量の一次関数（スコア） z の関数 $g(z)$ で表現し、デフォルトの観測データに最も適合するようにパラメータを決定する。モデルはリンク関数 $g(z)$ の選択により分類され、 $g(z)=z$ は線形モデル、 $g(z)=1/(1+e^{-z})$ は二項ロジットモデル、 $g(z)=\Phi(z)$ は二項プロビットモデル、 $g(z)=1-e^{-z}$ は対数モデルと呼ばれる。ここで、 Φ は標準正規分布の分布関数である。線形モデルでは $g(z)<0$ や $g(z)>1$ もありえるが、他のモデルでは $g(z)$ に分布関数を使っているので必ず $0\leq g(z)\leq 1$ になる。

デフォルト/非デフォルトの二群の発生確率を求める上記のモデルは項目反応理論の枠組みで解釈できる。項目反応理論では、刺激 U は観測可能な刺激 u と観測不可能な刺激 ε の和 $U=u+\varepsilon$ で書けるとし、 U がある閾値 ξ を超えると反応が現れると考える。すると、 U が ξ を超えるか否かで状態は二分され、 ε の分布に応じてそれぞれの発生確率が与えられる。

信用格付けのように複数の状態への分類や各状態の出現確率を扱うモデルには、逐次モデル、順序モデル、確率選択モデルがある。逐次モデルは前述の二項モデル（二群判別モデル）を繰り返し適用することで多くの状態に分類し、各状態の発生確率を求めるモデルである。これに対して、順序モデルは複数の状態に「順序」があるときに適用されるもので、項目反応モデルにおける閾値 ξ を複数（状態数-1）個設定して各区間を一つの状態とみなし、スコアの値によりどの状態が実現するかを判別する。確率選択モデルでは、複数個（ K 個）の状態があるとき、個々の状態に対して好ましき $U_k=u_k+\varepsilon_k$, $k=1, \dots, K$ を設定し、最も好ましきの大きな状態が実現すると考える。ここで、 u_k は共変量の関数、 ε_k は確率変数で、 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K)$ の分布により異なるモデルに細分化される。

一方、デフォルト確率の期間構造を考慮したいとき

は、ハザード率を時間の関数あるいは確率過程で表現するハザードモデルが使われる。さらに、共変量への依存性も考慮するモデルも提案されており、構造の簡単な比例ハザードモデルは実務でも使われている。

なお、実務ではオプション価格理論を用いて企業の期待デフォルト確率を推定するモデルもある。

2.3 ポートフォリオモデル

ポートフォリオのリスク計測では、分散投資効果を適切に評価するために、各資産の将来価格（または潜在損失額）の依存性を考慮しなければならない。特に、VaR (Value at Risk) のように分布の裾の形を直接反映する尺度を用いたリスク計測が定着した昨今では、依存性評価の重要性はますます高まっている。

信用リスクの源泉はデフォルトなので、モデルの基礎は複数資産のデフォルトの相互依存モデルであり、これまでに条件付独立モデル、伝播デフォルトモデル、コピュラモデルが提案されている。条件付独立モデルは、ある条件を与えられたとき、個々の資産のデフォルト時刻が独立と仮定するモデルである。伝播デフォルトモデルは、ある資産のデフォルトが他の資産のデフォルト確率に影響を与えるモデルであり、企業の連鎖倒産を想像すると理解しやすい。コピュラモデルは、各資産のデフォルト時刻の依存関係をコピュラ (copula, 接合関数) で表現するモデルである。

実務で最もよく使われているのは、全資産の格付推移を追跡して、信用リスクを時価ベースで計測する CreditMetrics™ とその改訂版である。これらはコピュラモデルに属し、デフォルト時刻の同時分布はガウシアンコピュラ (Gaussian copula) を用いて表現される。CDO (債務担保証券) という証券化商品の価格付けには CreditMetrics™ を簡略化した 1 ファクター・ガウシアンコピュラモデルが使われるが、このモデルはコピュラモデルであると同時に、条件付独立モデルとしても表現できる。

参考文献

- [1] 木島正明, 小守林克哉: 信用リスク評価の数理モデル, 朝倉書店 (1999).
- [2] 楠岡成雄, 青沼君明, 中川秀敏: クレジット・リスク・モデル, 金融財政事情研究会 (2001).
- [3] 室町幸雄: ポートフォリオの信用リスクと CDO の価格付け, 朝倉書店 (2007).
- [4] 森平爽一郎: 信用リスクモデリング—測定と管理—, 朝倉書店 (2009).