領域間距離の積率の近似公式

栗田　治

平面上の2つの領域内に一様な点を与え，領域間の直線距離の積率を近似する方法を述べる．その過程で平均距離が持つ興味深い幾何学的構造が判明する．提案する公式は取り扱いが容易で，かつその精度も比較的に優れている．

1. 背景

平面上に2つの閉領域 A と B を与える（図1）．領域 A 内で一様な点 P から，領域 B 内で一様な点 Q への直線距離 $r=r(P,Q)$ の ν 次の積率は次式の通りである：

$$\langle r^{\nu}\rangle=\frac{1}{S_A S_B}\int_A\int_B\{r(P,Q)\}^{\nu}\mathrm{d}P\,\mathrm{d}Q. \tag{1}$$

S_A と S_B は領域の面積を，$\langle\cdot\rangle$ は平均値を意味する．

都市のORにはこの積率が頻出する．空間相互作用モデルのゾーン間距離として，$\nu=1$ とした平均距離が使える[8]．また，施設配置のミニサム型問題の目的関数は，領域から施設点への平均距離に各領域の人口を乗じた総和である[5][9]．この場合，2つの領域のうち一方を点で与えている．点と領域の間の平均距離はハフモデルの距離設定にも役立つ．さらに，連続型の重力モデルを適用して領域間トリップ数や距離の特性値を算出する上でも，(1)式の積分が基礎となる[2]．

(1)式を陽に求めるのは簡単ではない．$\nu=1$（平均距離）に限定しても，算出されたのは2つの重なり合わない円盤領域の場合[8]と，辺を接する2つの合同な矩形の場合[7]のみである．前者の平均距離はAppellの超幾何関数に帰着し，数値計算を必要とする．

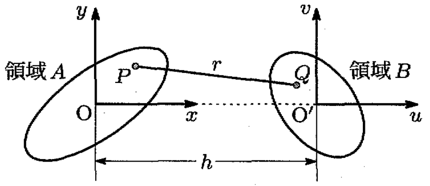

図1　領域 A 内の点 P と領域 B 内の点 Q との距離 r

くりた　おさむ
慶應義塾大学 理工学部
〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1

2. 距離の積率の二項展開による導出法

二項展開による方法[10]を一般化した，距離の積率の展開法[2]を紹介する．

まず，領域 A ならびに B の幾何重心を各々 O，O′ とし，$h=r(\mathrm{O},\mathrm{O}')$ とおく．領域 A 内の点は O を原点とする直交座標系で $P=(x,y)$，領域 B 内の点は O′ を原点とする直交座標系で $Q=(u,v)$ とする．x 軸ならびに u 軸は，O と O′ を結ぶ直線に沿っている（図1）．

このとき $p_1=u-x$, $p_2=v-y$, $q^2=p_1{}^2+p_2{}^2$ とおけば，距離 r の ν 乗は次式で表される：

$$r^{\nu}=\{r(P,Q)\}^{\nu}=h^{\nu}\left\{1+\left(\frac{2p_1}{h}+\frac{q^2}{h^2}\right)\right\}^{\nu/2}. \tag{2}$$

中括弧の部分を，1と $(2p_1/h+q^2/h^2)$ の二項級数に展開し（収束半径は $|2p_1/h+q^2/h^2|<1$），$1/h$ の冪級数として整理，これに基づき r^{ν} の期待値を算出する：

$$r^{\nu}=h^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(\nu)}{h^k}\Rightarrow\langle r^{\nu}\rangle=h^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle c_k(\nu)\rangle}{h^k}. \tag{3}$$

誌面の制約により，低次の係数のみを例示する：

$$\begin{aligned}&\langle c_0(\nu)\rangle=1,\quad\langle c_1(\nu)\rangle=\nu\langle p_1\rangle=0,\\&\langle c_2(\nu)\rangle=\nu\{(\nu-1)(\langle x^2\rangle+\langle u^2\rangle)+\langle y^2\rangle+\langle v^2\rangle\}/2,\\&\langle c_3(\nu)\rangle=\nu(\nu-2)\{(\nu-1)(\langle u^3\rangle-\langle x^3\rangle)\\&\qquad+3(\langle uv^2\rangle-\langle xy^2\rangle)\}/6.\end{aligned} \tag{4}$$

x, y, u, v の多項式の平均値を適宜計算し(3)の係数を準備し，適当な次数で打ち切れば積率が近似できる．

3. 平均距離の近似公式

(3)式で $\nu=1$ とし，平均距離を書き下してみよう：

$$\langle r\rangle=h\left\{1+\frac{\langle y^2\rangle+\langle v^2\rangle}{2h^2}+\frac{\langle xy^2\rangle-\langle uv^2\rangle}{2h^3}+o(h^{-3})\right\}.$$

上式で，最初の2項だけを抽出すると，次を得る：

【平均距離の近似公式】 $\langle r\rangle^*=h+\dfrac{\langle y^2\rangle+\langle v^2\rangle}{2h}.$ (5)

(5)式は示唆的である．すなわち領域の間の平均距離を考えた場合，(i)最も重要な尺度は重心間の距離 h であり，(ii)次に重要な尺度は，各領域の縦方向（y 軸な

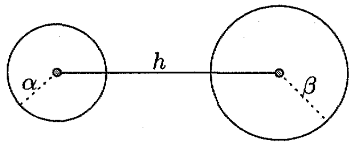

図2　2つの互いに交わらない円盤領域

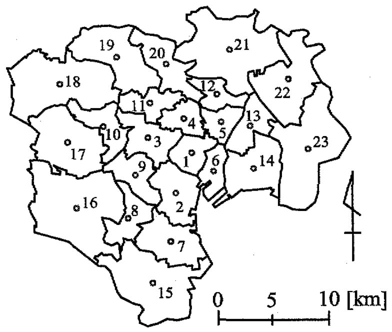

図3　東京23区とその重心

らびに v 軸）の周辺分布の2次の積率 $\langle y^2\rangle$ と $\langle v^2\rangle$ なのだ．

4．2つの領域が円盤のとき

領域 A, B を半径 α と β の円盤とする（図2）．このときの積率を(3)式によって求めると次の通り：

$$\langle r^{\nu}\rangle_{円円}=h^{\nu}\left\{1+\frac{\nu^2(\alpha^2+\beta^2)}{8h^2}+\frac{\nu^2(\nu-2)^2(\alpha^4+3\alpha^2\beta^2+\beta^4)}{192h^4}+\cdots\right\}. \tag{6}$$

$\nu=1$ とおいて円盤間の平均距離近似公式をつくる：

$$\langle r\rangle^*_{円円}=h+\frac{\alpha^2+\beta^2}{8h}. \tag{7}$$

$\alpha=\beta$ のときの精度を紹介する．$h=\alpha$ という交わりを持つ場合でさえ(7)の近似誤差は−2.739%である．$h=2\alpha$（円盤が丁度接している状況）のとき，−0.179%である．そして，円盤同士が離れるに連れて，誤差は逓減する（$h=3\alpha$ のとき近似誤差は−0.035%）．

また，この結果に基づけば，円周上で一様な点の間の平均距離[6][9]や回転対称な点分布の間の平均距離[1][3]も追求できる．なお，円盤がそれより小さな円盤を完全に含む場合の平均距離も網羅的に追求されている[6]．

5．東京23区を例にした平均距離の精度検証

図3の相異なる区の，$\langle r\rangle$ が10 km未満のペアについて，厳密値と近似値の関係を図4に示す（厳密値は数値積分による）．近似精度は優れている（詳細は文献[5]）．

ここでの手法は点と多角形の平均距離計算にも直ちに応用でき，多角形領域で一様な点への平均距離の等高線を描くためにも役立つ[4]．

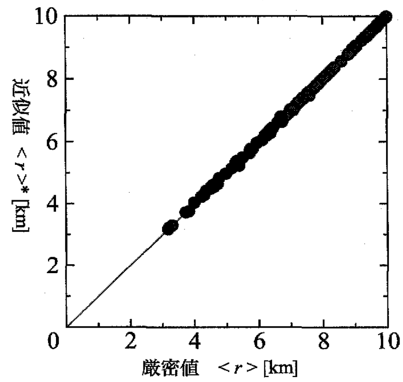

図4　数値積分による厳密値 $\langle r\rangle$ と近似値 $\langle r\rangle^*$ との関係（$\langle r\rangle<10$ km なる114ペアについてプロット）

参考文献

[1] 栗田治, 放射対称な人口分布に関する平均距離, 都市計画論文集, No. 24, pp. 331-336, 1989.

[2] 栗田治, 移動量の減衰函数に基づいた領域間距離の近似公式, No. 28, 都市計画論文集, pp. 391-396, 1993.

[3] 栗田治, 円盤領域における線形人口分布に関する平均距離—3次元都市の最適プロポーション解析への応用—, 都市計画論文集, No. 35, pp. 1015-1020, 2000.

[4] 栗田治, 多角形領域で一様に分布する点から固定点への直線距離の平均値と2次の積率—平均直線距離の等高線の描画法—, GIS—理論と応用, Vol. 9, No. 1, pp. 29-37, 2001.

[5] 栗田治, 腰塚武志, 領域間平均距離の近似理論とその応用, 都市計画論文集, No. 23, pp. 43-48, 1988.

[6] 栗田治, 腰塚武志, 周上で一様な点に関する平均値のある導出法とその応用, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1-B-2, pp. 38-39, 1989.

[7] Alagar, V. S., The Distribution of the Distance Between Random Points, *Journal of Applied Probability*, Vol. 13, pp. 558-566, 1976.

[8] Bouwkamp, C. J., On the Average Distance between Points in Two Coplanar Non-Overlapping Circular Disks, *Journal of Applied Science and Engineering A*, Vol. 2, pp. 183-186, 1977.

[9] Koshizuka, T. and Kurita, O., Approximate Formulas of Average Distances Associated with Regions and Their Applications to Location Problems, *Mathematical Programming*, *B*, Vol. 52, pp. 99-123, 1991.

[10] Vaughan, R., Approximate Formulas for Average Distances Associated with Zones, *Transportation Science*, Vol. 18, pp. 231-244, 1984.