コンピューテーショナル・ファイナンス

今井　潤一

金融工学の実践におけるコンピューテーショナル・ファイナンスの重要性は年々上昇している．オプション評価に関しては，現実に取引される商品がますます複雑化しているという現状が背景にある．複数の原資産，経路依存性，満期前行使の可能性など，解析的な評価が困難な金融デリバティブ，年金・保険，仕組み債が多数取引されている．また，VaR に代表される金融機関のリスク管理においては膨大な種類の金融資産のリスクを毎日計算する必要があり，このことからも計算機の有効利用は不可欠である．加えて，数多くの実証分析が現実の金融資産の収益率が正規性を持っていないことを報告しており，レヴィ過程など，より現実の資産価格プロセスを表現できる確率過程が求められている．本項目では，主にオプション評価に用いられる数値計算手法に焦点を当てる．

1.　ブラック・ショールズ（BS）公式

オプション評価理論において，BS の公式はヨーロピアンコールオプションの価格を導出する計算式として広く知られている．ただし，これには標準正規分布の累積密度関数を計算する必要があり，これは陽には求まらないため何らかの方法での近似計算が必要となる．

2.　格子モデル

格子モデルの代表的モデルである 2 項モデルや 3 項モデルは幾何ブラウン運動の離散近似モデルとして提案された．格子モデルでは原理的には 1 期間の平均や分散を対応する連続モデルの平均や分散に合わせることによって近似する．配当を考慮したモデルや為替レートのモデル，金利のモデルなどを近似することが可能である．オプション評価では，リスク中立確率測度に代表される評価測度の下での格子モデルを構築し，その期待値を利用してオプションの価格を計算する．また，複数の原資産が存在する場合のモデルについても，多項モデルを想定することでその相関を考慮した格子モデルを構築することが可能である．また，実際の市場のデータを直接格子の作成に反映させることでボラティリティの変動などをうまくモデルに当てはめることを意図したインプライド 2 項モデルといったアイディアにも活用されている．

格子モデルはバックワードの計算が簡単であるため，オプションの満期前に意思決定を行う必要のあるアメリカン（厳密にはバミューダン）スタイルのオプションの評価が容易という特徴を持つ．一方，再結合を前提として作られることが多いため経路依存のオプションの評価を行うことは難しい．ただし，エイジアンオプションなど有名なオプションについてはいくつかの方法が提案されている[2]．

3.　偏微分方程式の数値解法

オプションの価格は，偏微分方程式の解という形でも表現できる．例えば BS の方程式は，2 階の線形偏微分方程式で表現でき，オプションの満期でのペイオフが初期条件となる．方程式の解は偏微分方程式の数値解法で求められる．これは金融工学に特有なものではなく，むしろ工学の世界で発展してきた方法をこの分野に応用したものと考えられる．金融オプションの評価では有限差分法（FDM）が利用されることが多い．これは原資産価格軸と時間軸の 2 次元領域をメッシュに分け偏微分方程式を差分近似することで差分方程式を求め，それらを逐次的に解いていく方法である．差分の方法には前方差分と後方差分，中心差分の 3 通りが考えられ，それぞれ採用する差分によって近似誤差や計算方法が異なる．時間に対して前方差分を取る方法は陽的解法と呼ばれ，連立方程式の解が陽に表されるため，計算が簡単になる特徴を持つ．一方，時間に関して後方差分をとる方法は，陰的解法と呼ばれる．

いまい　じゅんいち
慶應義塾大学 理工学部
〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1

この場合，全体を合わせた連立方程式を解く必要が生じる．また，陽的解法と陰的解法をパラメータθで重みづけたθ法と呼ばれる方法も提案されており，特に$\theta=1/2$の場合はクランク・ニコルソン法と呼ばれる．クランク・ニコルソン法は時間に対して中心差分を取ることに対応している．FDMの解法は原理的に逆行列を求めることに対応する．差分のためのメッシュを細かくすればするほど，名目的な行列の次元が大きくなり，大部分の要素がゼロであるスパース行列の逆行列を求めることになる．実際には，このスパース行列の逆行列を直接求めることはなく，様々な数値計算アルゴリズムが用いられる[3].

有限差分法に変わる数値解法として，有限要素法(FEM）を用いた方法も提案されている．FDMがメッシュ状の点の間で成立する方程式を差分によって近似する方法であるのに対し，FEMでは有限要素と呼ばれる小領域内で成立する積分方程式を近似する方法であると解釈でき，ガラーキン法などが知られている．FDMに比べて複雑な形状にも適用できる高い柔軟性を持つため，エキゾティックなオプションに対して応用される．さらに，分析領域を細かく細分し，それぞれのノードに対応するコントロールボリュームを基に近似を行う有限体積法（FVM）もオプション評価に応用されている．

偏微分方程式の数値解法は格子法と比べてその汎用性が高く，計算精度も高い．アメリカンオプションの評価も可能で，かつ新しい変数を導入することでパス依存のオプションの評価にも対応できる．ただし，格子法と同様，多数の原資産が存在する場合には次元の呪いにより計算が困難となる．

4. モンテカルロ法（MC）

MCは乱数を用いて原資産価格の挙動を多数発生させ，実現したオプション価値の平均を取ることで期待値の計算を行い，その結果オプションの価格を推定しようとする方法である．モンテカルロ法の理論的根拠は大数の法則と中心極限定理に基づいている．大数の法則により，乱数によって人工的に発生させた多数のオプションの価格の平均を取ることでリスク中立確率測度の下でのオプションの期待値を計算することが可能となる．また，中心極限定理により，推定値の誤差評価が可能となる．実際の計算は計算機上で行われるが，そのときには疑似乱数が利用される．代表的な疑似乱数としては例えば，メルセンヌ・ツイスターなどが知られている．

MCは高次元の問題を扱えるほとんど唯一の計算手法である．満期でのペイオフが多数の証券価格のペイオフの関数として表されるバスケットオプションの評価はその代表例である．格子法や偏微分方程式では，次元が増えるにしたがって考える空間の次元が増大し，事実上計算機による数値計算が不可能となるが，MCでは次元の増大に関わらずその計算手法は全く変わらず取り扱うことができる．また，経路依存型のオプションや，近年注目を集めているレヴィ過程への拡張も可能である．またかつては，極めて困難と考えられていたバミューダンオプションの評価についても有望な方法が提案されており，今後の発展が注目される．

MCの欠点の一つは，収束速度の遅さである．一般に，推定値の精度を一桁上げるためには100倍のシミュレーション試行が必要となる．そのため，制御変数法や対照変量法，層別抽出法など様々な分散減少法が提案されている．乱数の代わりに一様性を考慮した決定論的な点列であるLD列を用いることで，その推定精度の向上を目指した準モンテカルロ法（QMC）も有力な代替案である．代表的なLD列としてSobol'列，Faure列，Niederreiter列などが知られている．QMCは特に金融分野での効果が大きいことが知られている．さらに，精度の向上やMCと同様の誤差評価を目的としたLD列の乱数化，低次元LD列の高次元化が提案されており，またLD列の特長を生かした分散減少法も提案されている[1].

参考文献

[1] Glasserman, P., *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag, New York (2004).

[2] Van der Hoek, J. and Elliott, R. J., *Binomial Models in Finance*, Springer (2006).

[3] Wilmott, P., Dewynne, J. and Howison, S., *Option Pricing : Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press (1993).