# 同値マルチンゲール測度の導出

田中　敬一

条件付き請求権の無裁定価格の算出に重要である同値マルチンゲール測度は，基準財を指定した上で，すべての証券の相対価格がマルチンゲールとなるように構成する．

## 1．同値マルチンゲール測度

ある資産 $A$ の価格 $A(t)$ が常に正であれば，その資産 $A$ を**基準財** (numéraire) として，他の証券 $S$ の相対価格 $S(t)/A(t)$ を定義できる．確率測度 $Q^A$ が基準財 $A$ に関して**同値マルチンゲール測度** (EMM, Equivalent Martingale Measure) であるとは，$Q^A$ が観測確率測度 $P$ と同値であり，かつ，すべての証券価格 $S(t)$ について，その相対価格 $S(t)/A(t)$ がマルチンゲールとなる確率測度である．

## 2．無裁定のための同値マルチンゲール測度

資産価格の第1基本定理から，同値マルチンゲール測度が存在すれば，市場に裁定機会は存在しない．すなわち，適当な基準財を選び，その同値マルチンゲール測度を構成できれば無裁定であることが保証される．

例えば，市場では預金 $B$ と株式 $S$ の2証券のみが取引されており，その価格が，観測確率測度 $P$ の下で

$$dB(t)=rB(t)dt,$$
$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dW(t)$$

を満たすと仮定する．ここで，$W$ は $P$-ブラウン運動であり，$W$ が生成するフィルトレーションを $\{\mathcal{F}_t\}$ とする．このとき相対価格 $S/B$ は

$$d\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right)=\sigma\frac{S(t)}{B(t)}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}dt+dW(t)\right)$$

を満たす．したがって，確率測度 $Q$ を

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t}=L(t)\equiv\exp\left\{-\lambda W(t)-\frac{1}{2}\lambda^2 t\right\},$$
$$\lambda=\frac{\mu-r}{\sigma}$$

によって定義すれば，Girsanov の定理から，$Q$ の下では $W^Q(t)=W(t)+\lambda t$ がブラウン運動となる．すなわち，相対価格の確率微分方程式は $Q$ の下で

$$d\left(\frac{S(t)}{B(t)}\right)=\sigma\frac{S(t)}{B(t)}dW^Q(t)$$

となり，相対価格が $Q$-マルチンゲールとなる．すなわち $Q$ は預金を基準財とする同値マルチンゲール測度 $Q^B$ である．資産価格の第1基本定理から，この市場に裁定機会は存在しない．この測度 $Q=Q^B$ をリスク中立測度と呼び，また，$\lambda$ をリスクの市場価格と呼ぶ．

## 3．基準財の変換

ある基準財 $A_{old}$ に関する同値マルチンゲール測度 $Q_{old}$ が得られれば，条件付き請求権の無裁定価格を考えることが可能となる．条件付き請求権の内容から上手に新たな基準財 $A_{new}$ を選び直せばその価格導出が容易になる．そのために，新しい基準財 $A_{new}$ に関する同値マルチンゲール測度 $Q_{new}$ を以下のように構成すればよい．確率測度 $Q_{new}$ を

$$\left.\frac{dQ_{new}}{dQ_{old}}\right|_{\mathcal{F}_t}=L(t)\equiv\frac{A_{new}(t)}{A_{old}(t)}\frac{A_{old}(0)}{A_{new}(0)}$$

によって定義する．ここで $L(t)$ は，$L(0)=1$ となるように標準化された相対価格であるので，$Q_{old}$ の仮定から正値マルチンゲールである．仮定から，$Q_{old}$ の下では，古い基準財 $A_{old}$ に関してすべての証券価格 $S$ の相対価格がマルチンゲールであるから

$$\frac{S(t)}{A_{old}(t)}=E_t^{Q_{old}}\left[\frac{S(T)}{A_{old}(T)}\right]$$

が成立している．ここで $E_t$ は条件付き期待値を表す．新しい基準財に関する相対価格に変換するために，両辺に $A_{old}(t)/A_{new}(t)$ を乗じて新しい基準財に関する相対価格の形でまとめると，ベイズの公式

たなか　けいいち
首都大学東京 大学院社会科学研究科
〒192-0397 八王子市南大沢 1-1

$E_t^{Q_{new}}[X(T)]=E_t^{Q_{old}}\left[\frac{L(T)}{L(t)}X(T)\right]$ を用いて次式が得られる．

$$\frac{S(t)}{A_{new}(t)}=E_t^{Q_{old}}\left[\frac{L(T)}{L(t)}\frac{S(T)}{A_{new}(T)}\right]$$
$$=E_t^{Q_{new}}\left[\frac{S(T)}{A_{new}(T)}\right]$$

すなわち，基準財 $A_{new}$ に関するマルチンゲール測度 $Q_{new}$ が得られた．

基準財を満期日 $T$ のゼロクーポン債 $P(\cdot, T)$ に取れば，対応する同値マルチンゲール測度 $Q^T=Q^{P(\cdot,T)}$ は $T$-フォワード測度である．また，年金（異なる満期日を持つ1単位のゼロクーポン債のポートフォリオ）を基準財とする同値マルチンゲール測度はスワップ測度と呼ばれる．

## 4. オプション価格

オプション価格を同値マルチンゲール測度によって容易に求めることができる．

満期 $T$ において，1単位の資産 $S_1$ と $K$ 単位の資産 $S_2$ を交換する $S_1$-Call/$S_2$-Put オプション（オプションの買い手が $S_2$ を売り手に渡し，売り手からは $S_1$ を受け取る権利）の価格 $C$ を考えよう．株式オプション，債券オプション，外国為替オプションでは，すべて $S_1$ として対象となる資産（外国為替オプションでは外国通貨建てゼロクーポン債の自国通貨価格）で，$S_2$ は支払通貨のゼロクーポン債 $P(\cdot, T)$ である．

このオプションの満期における価値は

$$C(T)=\max(S_1(T)-KS_2(T), 0)$$
$$=S_1(T)\mathbf{1}_F-KS_2(T)\mathbf{1}_F$$

である．ここで，$F$ は満期日にインザマネーになる事象 $F=\{K<S_1(T)/S_2(T)\}$ である．$S_2$ を基準財とする同値マルチンゲール測度 $Q_2$ の下では，相対価格 $C(t)/S_2(t)$ はマルチンゲールであるから

$$C(t)=S_2(t)E_t^{Q_2}\left[\frac{S_1(T)\mathbf{1}_F-KS_2(T)\mathbf{1}_F}{S_2(T)}\right]$$
$$=S_2(t)E_t^{Q_2}\left[\frac{S_1(T)}{S_2(T)}\mathbf{1}_F\right]-KS_2(t)E_t^{Q_2}[\mathbf{1}_F]$$

となる．右辺第1項については基準財を $S_1$ に変換することにより

$$C(t)=S_1(t)E_t^{Q_1}[1_F]-KS_2(t)E_t^{Q_2}[1_F]$$

と表現できる．したがって $Q_1$ および $Q_2$ におけるインザマネーになる事象 $F$ の確率が計算できればオプション価格が得られる．例えば，株価と金利がともにブラウン運動によって確率的に変動する状況下の株式オプション価格も容易に計算できる．この表現は資産価格の変動モデルに依存せず，示唆に富む結果である．