A Regularized Explicit Exchange Method for Semi-Infinite Programs with an Infinite Number of Second-Order Cone Constraints

奥野　貴之
（京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻　現所属・同大学院情報学研究科数理工学専攻）
指導教員　林　俊介 助教・福島雅夫 教授

1. はじめに

本研究では，以下のような無限個の二次錐制約付きの半無限計画問題（SISOCP）を考える．

$$\begin{aligned}&\text{Minimize} \quad f(x)\\&\text{subject to } A(t)^\top x-b(t)\in\mathcal{K}\\&\qquad\qquad \text{for all } t\in T \qquad\qquad (1.1)\end{aligned}$$

ただし，$T\subseteq\mathbb{R}^l$ は与えられた空ではないコンパクト集合，$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は連続的微分可能な凸関数，$A:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^{n\times m}$，$b:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^m$ は連続関数である．また $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^m$ は二次錐の直積であり，$\mathcal{K}:=\mathcal{K}^{m_1}\times\mathcal{K}^{m_2}\times\cdots\times\mathcal{K}^{m_s}$，$\mathcal{K}^{m_j}:=\{(x_1,\cdots,x_{m_j})^\top\in\mathbb{R}^{m_j}|x_1\geq\sqrt{x_2^2+\cdots+x_{m_j}^2}\}$，$m=m_1+m_2+\cdots+m_s$ である．f が線形関数，T が有限集合の場合は，SISOCP (1.1) はよく知られた線形な二次錐計画問題（Second Order Cone Program: SOCP）[1]である．特に $\mathcal{K}=\mathbb{R}^m_+=\{z\in\mathbb{R}^m|z$ の各成分が非負$\}$ のとき，SISOCP (1.1) は古典的な半無限計画問題（Semi-Infinite Program: SIP）[2]に帰着される．SIP は，工学や経済において多くの応用をもつが，SISOCP (1.1) もチェビシェフ近似問題[3, Section 1]などに応用することができる．SIP において，最適解での Karush-Kuhn-Tucker（KKT）条件が適当な仮定の下で，無限個の制約関数の中から取り出された有限個の制約関数を用いて記述できることが知られている．本研究では，SISOCP (1.1) の場合でも最適解において SIP と同様の結果が得られることを示す．また SISOCP (1.1) を解くためのアルゴリズムとして正則化法と陽的交換法を組み合わせた正則化陽的交換法を提案し，その手法で生成される点列の大域的収束性を示す．最後に正則化陽的交換法を計算機上で実装し，線形な目的関数をもつ SISOCP (1.1) に対して適用した数値実験結果を報告する．

2. 最適性条件

本節では，$x^*\in\mathbb{R}^n$ が SISOCP (1.1) の最適解であるための必要条件について述べる．SISOCP (1.1) に対して，次の一般化 Slater 制約想定（Generalized Slater constraint qualification: GSCQ）を仮定する．この制約想定は，次の節で述べるアルゴリズムが大域的収束性をもつためにも必要な条件である．

GSCQ: $A(t)^\top x^0-b(t)\in\operatorname{int}\mathcal{K}\,(\forall t\in T)$ を満たす点 $x^0\in\mathbb{R}^n$ が存在する．

上記制約想定の下で以下の定理が成り立つことを示した．

Theorem 2.1.[3, Theorem 2.12] SISOCP (1.1) において GSCQ が成り立つとする．$x^*\in\mathbb{R}^n$ が SISOCP (1.1) の最適解ならば，ある添え字 $t_1,t_2,\cdots,t_p\in T$ とラグランジュ乗数ベクトル $y_1,y_2,\cdots,y_p\in\mathbb{R}^m(p\leq n+1)$ が存在して

$$\nabla f(x^*)-\sum_{i=1}^{p}A(t_i)y_i=0,$$

$$y_i\in\mathcal{K},\ A(t_i)^\top x^*-b(t_i)\in\mathcal{K},$$

$$y_i{}^\top(A(t_i)^\top x^*-b(t_i))=0\ (i=1,2,\cdots,p)$$

が成り立つ．

3. 提案アルゴリズム

本節では，SISOCP (1.1) を解くために陽的交換法と正則化法を組み合わせた正則化陽的交換法を提案する．陽的交換法とは，k 回目の外部反復において，与えられた $\gamma_k>0$ に対して，無限集合 T をある有限部分集合 $T'\subset T$ で置き換えた二次錐計画問題を集合 T' を更新しながら繰返し解き，$A(t)^\top x^{k+1}-b(t)\in-\gamma_k e+\mathcal{K}\,(\forall t\in T)$ を満たす点 x^{k+1} を求める方法である（ただし，$e=(e^{1\top},e^{2\top},\cdots,e^{s\top})^\top\in\mathbb{R}^m$, $e^j=(1,0,\cdots,0)^\top\in\mathbb{R}^{m_j}$ である）．特に，x^k が元の問題のある

緩和問題の最適解であることから，$\{\gamma_k\}$ を $\gamma_k \to 0 (k \to \infty)$ であるように選べば，生成された点列 $\{x^k\}$ は SISOCP (1.1) の最適解に収束すると期待できる．実際，目的関数 f が狭義凸関数ならば，陽的交換法は SISOCP (1.1) に対して大域的収束性をもつ[3, Theorem 4.3]．本手法では，一般の凸関数に対する大域的収束性を保証するため，正則化法を陽的交換法に組み込む．この方法では，正則化項 $\frac{1}{2}\varepsilon\|x\|^2 (\varepsilon>0)$ を目的関数 $f(x)$ に加え，T を $T':=\{t_1, \cdots, t_p\} \subseteq T$ で置き換えた SOCP(ε, T'): Minimize $\frac{1}{2}\varepsilon\|x\|^2+f(x)$ subject to $A(t_i)^\top x-b(t_i) \in \mathcal{K}\ (i=1, 2, \cdots, p)$ を部分問題として解く．以下に提案アルゴリズムを述べる．

正則化陽的交換法

Step 0．正数列 $\{\gamma_k\}, \{\varepsilon_k\}$ を $\lim_{k\to\infty}\gamma_k=0, \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0, \gamma_k=O(\varepsilon_k)$ となるように選ぶ．有限部分集合 $E^0:=\{t_1^0, \cdots, t_l^0\} \subseteq T$ をとる．$k:=0$ とする．

Step 1．$r:=0, T_0:=E^k$ とする．SOCP(ε_k, T_0) を解き，最適解 v^0 を求める．以下の(a)-(c)を行う：

(a) $A(t_{\mathrm{new}}^r)^\top v^r-b(t_{\mathrm{new}}^r) \notin -\gamma_k e+\mathcal{K}$ であるような $t_{\mathrm{new}}^r \in T$ を見つけて，$\bar{T}_{r+1}:=T_r \cup \{T_{\mathrm{new}}^r\}$ として(b)へ．もし，そのような t_{new}^r が存在しない場合，すなわち，$A(t)^\top v^r-b(t) \in -\gamma_k e+\mathcal{K}$ が任意の $t \in T$ について成り立つならば，$x^{k+1}:=v^r$, $E^{k+1}:=T_r$ として Step 2 へ．

(b) SOCP$(\varepsilon_k, \bar{T}_{r+1})$ を解いて最適解 v^{r+1} と各 $t \in \bar{T}_{r+1}$ に対応するラグランジュ乗数ベクトル $y_t^{r+1} \in \mathbb{R}^m$ を求める．

(c) $T_{r+1}:=\{t \in \bar{T}_{r+1} | y_t^{r+1} \neq 0\}, r:=r+1$ として(a)へ．

Step 2．もし，γ_k と ε_k が十分小さければ終了．そうでなければ，$k:=k+1$ として Step 1 へ．

Step 1 において解く各 SOCP は，目的関数が正則化により強凸関数となるため実行可能領域が空でなければ唯一つ解をもち，既存の手法[1]で解くことが期待できる．Step 1-(a)における t_{new}^r の存在の有無を判定するためには T 上の最適化問題[3, Section 4]を解く必要がある．この問題は凸とは限らないため解を求めるのは容易ではないが，ここでは解が必ず求まると仮定する．Step 1-(c)では，ラグランジュ乗数を調べることで v^{r+1} でアクティブでない制約を取り除くことができ，次のステップにおいて SOCP を解くためのコストを減らすことができる．Step 1 は[3, Theorem 4.2]から有限回の反復で終了することを示すことができ，その意味で提案アルゴリズムは well-defined であるといえる．最後に収束性については，以下の定理が成り立つ．

Theorem 3.1．[3, Theorem 5.2] SISOCP (1.1) が空ではない解集合をもつとし，GSCQ が成り立つとする．このとき正則化陽的交換法で生成される点列は有界であり，任意の集積点は SISOCP (1.1) の解である．

4. 数値実験結果

本節では，正則化陽的交換法を実装し，線形な目的関数 $f(x)=c^\top x$ をもつ SISOCP (1.1) に対して適用した数値実験結果について報告する．本実験では，$T=[-1, 1] \subset \mathbb{R}$，変数 x の次元 n を 15 とした．また $A(t), b(t)$ の各成分は t に関する 3 次関数とし，その各係数はランダムに決定した（詳細は本修士論文[3]を参照）．そして二次錐の直積 $\mathcal{K}$ として全体の次元 m を 30 とし，異なる構造をもつ(i) $\mathcal{K}=\mathcal{K}^{30}$，(ii) $\mathcal{K}=\mathcal{K}^{10}\times\mathcal{K}^{20}$，(iii) $\mathcal{K}=(\mathcal{K}^{10})^3=\mathcal{K}^{10}\times\mathcal{K}^{10}\times\mathcal{K}^{10}$，(iv) $\mathcal{K}=(\mathcal{K}^5)^6=\mathcal{K}^5\times\mathcal{K}^5\times\mathcal{K}^5\times\mathcal{K}^5\times\mathcal{K}^5\times\mathcal{K}^5$ の各々の場合について問題を 10 個生成した．紙面の都合上，本稿では結果の詳細は割愛する．実験結果により，生成したすべての問題を解くことができ，アルゴリズムの有効性を確認できた．特に，次元の大きな二次錐を含んでいる $\mathcal{K}^{30}$，$\mathcal{K}^{10}\times\mathcal{K}^{20}$ の場合に比べ，次元は小さいが多くの二次錐の直積である $(\mathcal{K}^{10})^3$，$(\mathcal{K}^5)^6$ の場合の方が多くの計算時間がかかることが観察された．

参考文献

[1] M.S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd and H. Lebret, Applications of second-order cone programming, *Linear Algebra and its Applications*, 284: 193-228, 1998.

[2] M. Lõpez and G. Still, Semi-infinite programming, *European Journal of Operational Research*, 180: 491-518, 2007.

[3] T. Okuno, A regularized explicit exchange method for semi-infinite programs with an infinite number of second-order cone constraints, Master's thesis, Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University, 2009.