デポ間輸送問題に対するグラフアルゴリズムの研究

泉　奈央美
（慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻　現所属・㈱日立製作所）
指導教員　田村明久 教授

1. はじめに

本論文では，宅配業者が抱える輸送に関する問題を取り扱う．多くの宅配業者は，個人宅・企業から集荷した荷物を，営業所を通してデポと呼ばれる各地の拠点に一度集約する．そこから宛先に対応するデポに荷物を運び，各デポから再度営業所を通して個人宅・企業等へ配達している．この流れの中には主に2つの組合せ最適化問題が存在する．1つは営業所内での集荷・配達に関する最適化問題である．もう1つは，荷のデポ間移動に関する最適化問題である．前者は比較的規模が小さいながらも，難しい問題として扱われている．後者は規模も大きく，多くの制約が存在するため，より難しい問題として扱われている．本論文では後者の問題を扱い，制約を限った条件の下で，グラフ理論の問題へ変換した上で議論を与えた．

2. 問題定義

各デポ間で定められた荷量を，l 台以下のトラックで時間内に運びきれるかどうかを判定する問題を**デポ間輸送問題**と定義する．ただし，本論文ではデポ間の距離はすべて等しく，トラックが時間内にデポ間を k 回移動できると簡略化した場合を考える．この問題を，グラフ理論を用いて **k-ラインカバー問題**に変換する．

問題（k-ラインカバー問題）

（入力）有向グラフ $G=(V,E)$, $l\in\mathbb{Z}$.

（問い）パスの長さが k 以下であるとしたときに，各弧がちょうど1本のパスに含まれるような，$|\mathcal{P}|\leq l$ を満たすパスの集合 $\mathcal{P}$ は存在するか．

また，元の問題における空送り（荷台が空の状態でトラックが走ること）の存在を考慮することで，次のような変化形も考えられる．

問題（k-ラインカバー問題（重複））

（入力）有向グラフ $G=(V,E)$, $l\in\mathbb{Z}$.

（問い）パスの長さが k 以下であるとしたときに，各弧が少なくとも1本のパスに含まれるような，$|\mathcal{P}|\leq l$ を満たすパスの集合 $\mathcal{P}$ は存在するか．

これら k-ラインカバー問題ならびに k-ラインカバー問題（重複）を解くことで，デポ間輸送問題の解を得ることができる．なお，ここでは問題を判定問題として定義したが，$|\mathcal{P}|$ の最小化を目的とした最適化問題も k-ラインカバー問題，k-ラインカバー問題（重複）と呼ぶことにする．

3. 結果

k-ラインカバー問題ならびに k-ラインカバー問題（重複）に関して，次のような結果が得られた．

（結果1）2-ラインカバー問題は多項式時間可解である．

（結果2）3-ラインカバー問題，3-ラインカバー問題（重複）は $\mathcal{NP}$ 完全である．

（結果3）3-ラインカバー問題（重複）に対しては4/3-近似アルゴリズムが存在する．

（結果4）3-ラインカバー問題に対しては5/3-近似アルゴリズムを構築した．

（結果5）k-ラインカバー問題に対しては $(2k-1)/k$-近似アルゴリズムを構築した．

（結果6）k-ラインカバー問題が多項式時間可解であるための十分条件を考察した．

結果1は，2-ラインカバー問題が最大マッチング問題に多項式時間変換可能であることから導かれる．最大マッチング問題に対する既存の多項式時間アルゴリズムを適用すれば，2-ラインカバー問題に対しても多項式時間アルゴリズムを構築できる．なお，2-ラインカバー問題（重複）に関しても同様の結果が得られる．

結果2は以下のように示した．すでに $\mathcal{NP}$ 完全であるとわかっているEXACT COVER問題が P_4 分解問題に多項式時間還元可能であることを示すことで，有向2部グラフにおいて P_4 分解問題の $\mathcal{NP}$ 完全性を証明した．P_4 分解問題は3-ラインカバー問題の特別な場合であることから3-ラインカバー問題も $\mathcal{NP}$ 完全であることが導かれる．3-ラインカバー問題（重

複）に関しても，同様の議論から$\mathcal{NP}$完全性を示した．

結果3は，3-ラインカバー問題（重複）は，3-集合カバー問題に多項式時間還元できることから導かれる．なお，3-集合カバー問題とは，集合E, Eの要素3個以下からなる部分集合の族$\mathcal{S}$，非負整数$l\in\mathbb{Z}$が入力として与えられたとき，Eの各要素が$\mathcal{C}$の少なくとも1つの部分集合に含まれ，かつ$|\mathcal{C}|\leq l$を満たす部分族$\mathcal{C}\subseteq\mathcal{S}$の存在の有無を判定する問題である．この2つの問題は解が1対1に対応し，かつ近似比が保存されるような変換が可能である．よって，3-集合カバー問題に対する4/3-近似アルゴリズム[1][3]を利用することで，3-ラインカバー問題（重複）に対しても4/3-近似アルゴリズムを構築できる．なお，この4/3-近似アルゴリズムは，3-集合カバー問題に対する貪欲解法で得られる解に局所探索を加えたものである．

結果4が，本論文の主結果である．重複を許さない場合，貪欲解法では優れた解を得られない．よってオイラーグラフを利用し，重複を許した場合とは異なるアプローチにより近似アルゴリズムを構築する．そのアルゴリズムを記す準備として，まず頂点を次のように分類する．

- $V_+(G)=\{v\in V:\ \mathrm{indeg}(v)>\mathrm{outdeg}(v)\}$,
- $V_-(G)=\{v\in V:\ \mathrm{indeg}(v)<\mathrm{outdeg}(v)\}$,
- $V_0(G)=\{v\in V:\ \mathrm{indeg}(v)=\mathrm{outdeg}(v)\}$.

ここで$\mathrm{indeg}(v)(\mathrm{outdeg}(v))$は頂点$v$に入る（から出る）弧の数を表す．また$V_+(G)$に含まれる頂点を$V_+(G)$頂点と呼ぶ（他も同様）．さらに$\alpha(G)$を

$$\alpha(G)=\sum_{v\in V_+(G)}(\mathrm{indeg}(v)-\mathrm{outdeg}(v))$$

と定義する．この$\alpha(G)$を需要数と呼ぶ．

アルゴリズムC

1．与えられたグラフGに対して，$V_+(G)$頂点から$V_-(G)$頂点に向かう$\alpha(G)$本の弧を，各頂点$v\in V(G)$において$\mathrm{indeg}(v)=\mathrm{outdeg}(v)$が成り立つように加える．ただし，等式が成り立つ範囲内において加え方は任意とする．得られたグラフをG_Eとする．
2．G_Eからオイラー回路Cを任意に1つ取る．
3．Cから，1で加えた$\alpha(G)$本の弧を取り除く．Gに対するラインカバー$\mathcal{P}$が得られる．
4．各パス$p\in\mathcal{P}$に対して，長さが3以下になるように切断する．ただし，切断時に長さ3のパスができる限り多く得られるようにする．
5．4で得られた3-ラインカバー$\mathcal{P}_3$を返す．

このアルゴリズムCが，任意の入力に対して近似比5/3という保証を与えることを証明した．さらに，近似比はこれ以上改善することができないことと，オイラーグラフにする際の弧の加え方とオイラー回路の取り方を最適にすることで最適解が得られることも示した．3-ラインカバー問題を貪欲的に解いたときの近似比は2以上であり，重複を許した場合でも貪欲解法の近似比は11/6であることから，この近似比5/3は優れた値であるといえる．

結果5では，結果4を拡張することで，k-ラインカバー問題に対する$(2k-1)/k$-近似アルゴリズムを導出した．また$k=3$のときと同様に，近似比はこれ以上改善することができないことと，オイラーグラフにする際の弧の加え方とオイラー回路の取り方を最適にすることで最適解が得られることも示した．重複を許した場合も，貪欲解法の近似比は$k\to\infty$のときに発散するが，$(2k-1)/k$は2に収束することから，この近似比は優れた値であるといえる．

結果6は，局所探索構築へのアプローチとして得られた結果である．需要数αの数に注目し，$\alpha=2$かつグラフが非巡回的であるときは問題が多項式時間可解であることを示した．

参考文献

[1] R. Duh and M. Fürer: *Approximation of k-set cover by semi-local optimization*, STOC '97 (El Paso, TX), pp. 256-264, 1999.

[2] M. R. Garey and M. D. Johnson: *Computers and intractability, a guide to the theory of NP-completeness*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[3] A. Levin: *Approximating the unweighted k-set cover problem: greedy meets local search*, SIAM J. Discrete Math., Vol. 23, Issue 1, pp. 251-264, 2008.