投票力指数

福田恵美子

投票力指数とは，投票による意思決定システムにおいて，各投票者がどの程度の影響力を持っているかを表した指数であり，パワー指数とも呼ばれる．代表的なものとして，シャープレイ・シュービック指数やバンザフ指数があげられる．すでにEU閣議等への応用がされているが，より幅広い現実の問題へ適用できるよう，新しい指数の考案と公理による特徴付けや，計算アルゴリズムについての研究も行われている．

1. 投票ゲームと代表的投票力指数

まず，投票力指数を測りたい投票システムを，投票ゲーム（voting game）として表現する．投票ゲームとは，例えば議案の審議など，各主体が賛成か反対かどちらかの立場をとるような，2つの結果に対する投票を表現した特性関数形ゲームを指す．投票者（プレイヤー）の集合を $N=\{1, \cdots, n\}$ とし，N の部分集合 $S \subseteq N$ を提携（coalition）と呼ぶ．提携が得られる値（提携値）を，投票において議案を通すことができる場合1（勝利提携），通せない場合0（敗北提携）とすると，投票ゲームは，特性関数 $v: 2^N \to \{0, 1\}$ が以下の性質を持つ特性関数形ゲーム (N, v) で表される．

(i) $v(N)=1, v(\emptyset)=0$.

(ii) $S \subseteq T$ ならば，$v(S) \leq v(T)$.

(iii) $v(S)+v(N \backslash S) \leq 1$.

投票ゲームのうち，各主体 $i \in N$ がそれぞれ票数 w_i もつとし，q 票以上を獲得すると投票に勝つことができる多数決の状況を表したものを，重み付き多数決ゲーム（weighted majority game）といい，$[q; w_1, w_2, \cdots, w_n]$ と書く．ただし，$\sum_{i \in N} w_i \geq q > \sum_{i \in N} w_i/2$. 重み付き多数決ゲームでは，$\sum_{i \in S} w_i \geq q \Leftrightarrow v(S)=1$ とすることで，このゲームの特性関数を得られる．

議会における1つの党を投票者1人として扱い，各党が持っている議席数を票数とみなすことで，議会を重み付き多数決ゲームで表現できるので，重み付き多数決ゲームの応用例は多い．以下では，投票ゲームにおける，代表的な2つの投票力指数を紹介する．

1.1 シャープレイ・シュービック指数

シャープレイ・シュービック指数（Shapley-Shubik index）はシャープレイ値を投票者の影響力の評価に適用したものである．提案された議案に対し，それに賛成する投票者が順列にしたがって順番に提携を作っていく状況を考える．順列 σ において，投票者 i より前にいる投票者全体での提携を $P_\sigma(i)$ とすると，$P_\sigma(i)$ が敗北提携で $P_\sigma(i) \cup \{i\}$ が勝利提携となるとき，i は順列 σ のピボットであるという．シャープレイ・シュービック指数は，すべての順列が同様に確からしく発生することを仮定して，各投票者がピボットとなる確率，すなわち決定票を握る確率を求めたものである．投票者 $i \in N$ のシャープレイ・シュービック指数は

$$\varphi_i(v)=\sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S)-v(S \backslash \{i\})]$$

で定義される．ただし，$s=|S|$ とする．

1.2 バンザフ指数

投票者 i に対して，$S \ni i$ が勝利提携であり，$S \backslash \{i\}$ は敗北提携であるとき，この提携の組 $(S, S \backslash \{i\})$ をスウィングであるという．各投票者 i に対して，この投票者のスウィング数，すなわち i が抜けると敗北提携となるような勝利提携の数は $\eta_i(v)=\sum_{i \in S}^{S \subseteq N}[v(S)-v(S \backslash \{i\})]$ となる．投票者 i のバンザフ指数は，これを正規化した $\beta_i(v)=\eta_i(v)/\sum_{j \in N} \eta_j(v)$ で与えられる．

一般に，シャープレイ・シュービック指数とバンザフ指数は異なる．例として，2010年の参議院選挙後の参議院での各党のシャープレイ・シュービック指数（表中ではS-S指数），バンザフ指数を表1に示した．

投票力指数に関しては数多くの拡張がなされている．投票者のイデオロギーや政策といった立場の違いを加味した指数として，シャープレイ・オーウェン指数，

ふくだ　えみこ
防衛大学校 情報工学科
〒239-8686 横須賀市走水 1-10-20

表1　2010年8月2日現在の参議院の指数

政党名	議席数	S-S 指数	バンザフ指数
民主党	106	0.478	0.476
自由民主党	84	0.151	0.130
公明党	19	0.151	0.130
みんなの党	11	0.095	0.113
日本共産党	6	0.032	0.037
社民党	4	0.025	0.029
国民新党	3	0.017	0.021
たちあがれ日本	3	0.017	0.021
新党改革	2	0.011	0.014
無所属	4	各 0.006	各 0.007
合計	242	約 1.0	約 1.0

小野・武藤指数などがある．シャープレイ・シュービック指数では，提出された議案に対して投票者が賛成していく順列 σ はすべて等確率で生起するとしていた．これは，どの投票者も同程度に似通った，あるいは同程度に異なるイデオロギーをもつことを意味している．しかし現実には，もし投票者Aと投票者Bのイデオロギーが近ければ，投票者Aが賛成した議案に投票者Bがなかなか賛成しないような順列の生起確率は低くなると考えられる．シャープレイ・オーウェン指数，小野・武藤指数は，選好空間（ideological space）と呼ばれる空間を導入することで，こうした投票者間の立場の非対称性を考慮している．同様に，バンザフ指数についても，シュノイが立場の違いを考慮して拡張をしている．

2.　多選択肢投票ゲーム

先述の通り，投票力指数には様々な拡張が試みられているが，もっとも多い方向性が，投票ゲーム自体を拡張し，そのゲームにおける投票力指数を定義するという方法である．投票ゲームの拡張のひとつに，多選択肢投票ゲーム（multi-alternative voting game）がある．一般の投票ゲームでは，賛成，反対の2つの選択肢しかないが，これを3以上に拡張したのが多選択肢投票ゲームである．ここでは，3つの選択肢を持つ3-選択肢投票ゲームを紹介する[1].

従来の投票ゲームでは，ある議案に賛成でない投票者は，反対の立場をとることが決まっていた．すなわち，S が賛成者の集合とするなら，$N\backslash S$ は反対者の集合だったが，3-選択肢投票ゲームでは，共通部分を持たない提携の組 (S, T) に対して，S に属する投票者は賛成，T に属する投票者は反対をしており，いずれにも属さない投票者は棄権をしているとみなす．このように，3^N の各要素に対して，議案が通る場合 $u(S, T)=1$，通らない場合 $u(S, T)=-1$ として特性関数を定義することで，賛成，反対の他，棄権という選択肢を選べる状況を表している．

3-選択肢投票ゲームのシャープレイ・シュービック指数は，$\Phi_i(u)=(i$ がピボットになる回数$)/(3^n n!)$ で定義される．ただし，3-選択肢投票ゲームではピボットの概念がこれまでと異なり，賛成を表明していた $i\in S$ が反対に意見を変える場合と棄権をする場合の両方を考慮し，i が決定票を握っている回数を数える．

バンザフ指数の場合も同様に，$i\in S$ が反対に意見を変える場合と棄権をする場合の両方を考慮してこの投票者のスウィング数 $\zeta_i(u)$ を数え，総数で割ったもの $\zeta_i(u)/\sum_{j\in N}\zeta_j(u)$ をバンザフ指数として定義している．

上記のように $u(S, T)\in\{-1, 1\}$ とすると，賛成多数で可決されないときは否決される場合を考えることになる．多選択肢投票ゲームでは，特性関数の定義を状況に合わせて変えることで，複数議案が一度に提出され，そのうち1つを選ぶといった状況も記述できる．

3.　計算アルゴリズム

投票力指数の計算は，各投票者についてピボットとなる回数，あるいはスウィング数を数え上げることになり，アルゴリズムが指数関数時間となり，計算困難であることが知られている．Matsui[2]では，重みつき多数決ゲームのシャープレイ・シュービック指数とバンザフ指数，およびディーガン・パックル指数を計算することが，NP困難であることが示されている．同時に，動的計画法，列挙アルゴリズム，モンテカルロ法などによる計算手法が考案されている．

また，Cantor, Brams and Affuso は，母関数を用いて，シャープレイ・シュービック指数とバンザフ指数をそれぞれ計算しており，この計算方法は，Bilbao らによって合成ゲームでの指数計算にも応用されている．

多選択肢投票ゲームなどに関する指数も多く考案されているが，そうした複雑な状況を分析できる投票力指数についても効率的な計算アルゴリズムが提案されれば，応用研究の幅も広がると考えられる．

参考文献

[1] D. Felsenthal and M. Machover: Ternary voting games, International Journal of Game Theory, 26 (1997), 335-351.

[2] T. Matsui and Y. Matsui, A Survey of Algorithms for Calculating Power Indices of Weighted Majority Games, Journal of the Operations Research Society of Japan, 43(1) (2000), 71-86.