戦略型の協力ゲーム

増澤　拓也

協力ゲームと非協力ゲームの区別は，プレーヤーの提携行動に関する考え方の違いによるものであり，ゲームの表現形式の違いによるのではない．協力ゲームには，ゲームの特性関数による分析以外に，戦略型による分析がなされており，環境保全に関する協定のありかたなどが議論されている．

1.　序論

プレーヤーの提携行動を主題とする協力ゲームの研究は，ゲームの提携型（coalitional form）に関する数学的理論が知られている．しかし，提携型ゲームは，戦略型ゲームの情報を縮約したものであり，戦略ゲームに関する考察が重要となる場合もある．

提携型ゲームとは，プレーヤーの集合 N と，特性関数 $v: 2^N \to \mathcal{R}$ で表現される．ここで，$v(S)$ は，提携 $S \subseteq N$ が独力で獲得できる利得の合計値を示す．戦略型ゲームは $G: =(N, (X^i)_{i\in N}, (u^i)_{i\in N})$ で表される．ここで，N はプレーヤーの集合，X^i はプレーヤー i の純粋戦略の集合，$u^i: \prod_{i\in N} X^i \to \mathcal{R}$ はプレーヤー i の効用関数である．以下，$\prod_{i\in S} X^i$ を X^S などと表し，X^S 上の確率分布全体を Δ^S などと表す．また，X^i はコンパクトな集合，u^i は連続な関数とする．

2.　vNM 型特性関数

VonNeumann and Morgenstern[7]は，ミニマックス定理を n 人ゲームの分析へ適用して，戦略型ゲームから特性関数 v を生成する方法を示した．戦略型ゲーム G と提携 $S \subseteq N$ に対して次のような2人ゼロ和の戦略型ゲーム G_2 を定義する．プレーヤ1，プレーヤ2の純粋戦略の集合は，それぞれ X^S と $X^{N\setminus S}$，プレーヤ1の利得は，$x^S \in X^S$，$x^{N\setminus S} \in X^{N\setminus S}$ に対して，$\sum_{i\in S} u^i(x^S, x^{N\setminus S})$ とする．G_2 のミニマックス値で，提携 S の値が定義される．

$$u(S): =\max_{x^S} \min_{x^{N\setminus S}} \textstyle\sum_{i\in S} u^i(x^S, x^{N\setminus S})$$
$$=\min_{x^{N\setminus S}} \max_{x^S} \textstyle\sum_{i\in S} u^i(x^S, x^{N\setminus S}).$$

ただし，x^S，$x^{N\setminus S}$ の範囲はそれぞれ Δ^S，$\Delta^{N\setminus S}$ とする．特性関数 v はこのように定義されたとき，vNM 型特性関数と呼ばれる．

vNM 型特性関数 v があたえられたとき，提携 S は，利得ベクトル $(a^i)_{i\in S}$ が $\sum_{i\in S} a^i \leq v(S)$ を満たせば，$(a^i)_{i\in S}$ を自分達だけで獲得可能であると考えることができる．しかし，このように vNM 型特性関数によって議論を展開するとき，我々はゲームに関して以下のような想定をしていることになる．

1. 提携外のプレーヤーがどのような行動をとろうとも，自分達だけで獲得可能な利得を基準に行動する（最悪評価）．
2. 利得はプレーヤー間で自由に譲渡可能である．
3. プレーヤーは期待利得に基づいて，確率的な戦略を選択する．

これらの想定をやめるならば，ゲームは，vNM 型特性関数 v とは，別の枠組みで捉える必要がある．

3.　NTU ゲーム

利得の譲渡可能性を認めないと，最悪評価の二通りの方法，マックスミニとミニマックスの結果は一致しない[1]．提携 S にとって，ベクトル $(a^i)_{i\in S}$ が α 有効（effective）であるとは，以下が成り立つことである．

$$\exists x^S \in \Delta^S \forall x^{N\setminus S} \in \Delta^{N\setminus S} \forall i \in S: a^i \leq u^i(x^S, x^{N\setminus S}).$$

また，提携 S にとって，ベクトル $(a^i)_{i\in S}$ が β 有効であるとは，以下が成り立つことである．

$$\forall x^{N\setminus S} \in \Delta^{N\setminus S} \exists x^S \in \Delta^S \forall i \in S: a^i \leq u^i(x^S, x^{N\setminus S}).$$

利得ベクトルが，α 有効であるためには，$x^{N\setminus S}$ によらずに一つの戦略の組 x^S を選ぶ必要があるのに対し，β 有効であるためには，$x^{N\setminus S}$ に応じて戦略の組 x^S を選ぶことができればよい．前者はマックスミニの考え

ますざわ　たくや
大阪経済大学 経済学部
〒533-8533 大阪市東淀川区大隅 2-2-8

表1

純粋戦略			利得		
1	2	3	1	2	3
A	A	A	6	0	·
A	A	B	0	6	·
B	A	A	3	3	·
A	B	B	3	3	·
otherwise			0	0	·

に基づき，後者はミニマックスの考えに基づく．

自明な関係として，α 有効な利得ベクトルは，常に β 有効であるが，その逆は成立しない．$N=\{1,2,3\}$, $X^i=\{A,B\}$ として，利得が表1で定まる3人戦略型ゲームでは，$(a^1,a^2)=(2,2)$ は，提携 $S=\{1,2\}$ にとって，α 有効ではないが，β 有効である．

4. 非空なコア

提携 N にとって α 有効である利得ベクトル $(a^i)_{i\in N}$ は，どのような提携 $S\subseteq N$ にとっても，$\forall i\in S$: $a^i<b^i$ となるような α 有効な利得ベクトル $(b^i)_{i\in S}$ が存在しないとき，α コアに含まれるという．

確率的な戦略を想定しないで，つまり，α 有効性の定義中の Δ^S, $\Delta^{N\setminus S}$ を X^S, $X^{N\setminus S}$ に置き換えると，コアの非空性に関して次の定理が成立する．

定理1 (Scarf[6])　すべての i に関して，X^i が凸集合であり，u^i が定義域 X^N で準凹関数であるとき，純粋戦略の範囲で α 有効性を考えると，ゲームの α コアは非空である．

ここで要求されている条件は，Nash 均衡のよく知られた存在条件よりも強い．Nash 均衡の存在定理は，どのような $y^{N\setminus\{i\}}\in X^{N\setminus\{i\}}$ に対しても，定義域を X^i とする関数 $y_i\mapsto u^i(y^i,y^{N\setminus\{i\}})$ が準凹であることのみを要求している．

もう一つのコアの非空性の十分条件として，懲罰優位 (punishment-dominance) 条件が知られている．プレーヤー i の二つの戦略 x^i と y^i に関して，x^i は y^i に対して懲罰優位であるとは，どのような $z^{N\setminus\{i\}}\in X^{N\setminus\{i\}}$ に対しても，

$$\forall j\in N\setminus\{i\}:\ u^j(z^{N\setminus\{i\}},x^i)\leq u^j(z^{N\setminus\{i\}},y^i)$$

であることをいう．つまり，x^i から y^i への戦略の変化は，他プレーヤーの戦略にかかわらず，他のどのプレーヤの効用も下げることがないことをいう．さらに，どのプレーヤーのどの二つの戦略も，片方がもう一方に対し懲罰優位であるとき，ゲームは懲罰優位条件を満たすという．懲罰優位条件を満たす例に，クールノー寡占ゲームがある．ある企業の生産量の増大は，市場価格を低下させ，他企業の利潤を低下させる．

定理2 (Masuzawa[4])　懲罰優位条件を満たす戦略型ゲームにおいて，純粋戦略の範囲で α 有効性を考えると，ゲームの α コアは非空である．

5. ただ乗り行動と非最悪評価

最悪値評価の問題点は，当初から検討されている ([7]Chapter 6 section 58.3)．文献[5]は，最悪評価が，特に経済学における外部性を分析する際に問題となることを指摘し，代替方法を示している．最悪値評価によれば，他人の努力にただ乗りできるというプレーヤー達の思惑は反映されず，ただ乗り行動を問題化することができない．

ただ乗り行動を問題化する方法として，提携による離反の可能性を加えて Nash 均衡を精緻化する，強均衡や耐結託 Nash 均衡[2]の応用がある．一方，Chander and Tulkens[3]は，提携が一人のプレーヤーのように行動するゲームの，Nash 均衡に基づいて特性関数を定義し，そのコアを γ コアと名付けた．γ コアは，環境保全問題などに応用されている．

参考文献

[1] R. J. Aumann and B. Peleg, von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 173-179.

[2] B. D. Bernheim, B. Peleg and M. D. Whinston, Coalition-proof Nash equilibria I. Concepts, J. Econ. Theory 42 (1987), 1-12.

[3] P. Chander and H. Tulkens, The core of an economy with multilateral environmental externalities, Int. J. Game Theory 26 (1997), 379-401.

[4] T. Masuzawa, Punishment strategies make the a-coalitional game ordinally convex and balanced, Int. J. Game Theory 32 (2004), 479-483.

[5] R. W. Rosenthal, External economies and cores, J. Econ. Theory 3 (1971), 182-188.

[6] H. Scarf, On the existstence of cooperative solution for a general class of n-person games, J. Econ. Theory 3 (1971), 169-181.

[7] J. vonNeumann and O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behevior (1944): Princeton University Press: Princeton.