OR事典Wiki

ジョルダン代数

脇　隼人，村松　正和

ジョルダン代数とは，有限次元ベクトル空間に，可換でありジョルダン恒等式を満たす積が導入された代数のことである．ジョルダン代数は，主双対内点法とかかわりが深い．実際，対称錐と呼ばれる錐上の線形計画問題を主双対内点法で解くことができるのであるが，この事実は，ジョルダン代数の一種であるユークリッド的ジョルダン代数と対称錐との関係から導かれる．

本稿は紙面の都合上，ジョルダン代数や対称錐に関しては，ほとんど触れていない．詳細を知りたい読者は，文献[1]を参照してほしい．

1．ジョルダン代数

$\mathbb{R}$上のベクトル空間Vにおいて，$V\times V$からVへの双線形写像$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mapsto \boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$が定義されているときに，$V$を**$\mathbb{R}$-代数**と呼ぶ．また，この$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$を$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の積と呼び，積に関する単位元を$\boldsymbol{e}$と書く．本稿では，$\boldsymbol{e}$の存在を仮定する．

$\mathbb{R}$-代数Vで定義されている積が次の二つの公理を満たすとき，Vを**ジョルダン代数**と呼ぶ：

$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\circ\boldsymbol{x}$（交換則）

$\boldsymbol{x}\circ(\boldsymbol{x}^2\circ\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^2\circ(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y})$（ジョルダン恒等式）．

ここで，$\boldsymbol{x}^2$は$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}$のことである．

一般に，ジョルダン代数は結合則を満たすとは限らない．ジョルダン代数Vの元$\boldsymbol{x}$と自然数nに対して，$\boldsymbol{x}$の冪乗を$\boldsymbol{x}^n:=\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}^{n-1}$と定めると，$V$は冪乗に関して結合則が成り立つ．つまり，$\boldsymbol{x}$と自然数$n,m$に対して，$\boldsymbol{x}^n\circ\boldsymbol{x}^m=\boldsymbol{x}^{n+m}$が成り立つ．

Vの元$\boldsymbol{x}$に対して，

$$m(\boldsymbol{x}):=\min\{k>0 \mid (\boldsymbol{e},\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k)\text{が一次従属}\}$$

と定める．Vは有限次元なので$m(\boldsymbol{x})$は有限である．この$m(\boldsymbol{x})$を用いて，Vの**階数**rを$r:=\max\{m(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}\in V\}$と定義する．

2．ユークリッド的ジョルダン代数

ジョルダン代数Vにおいて，任意の元$\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$に対して，$\langle\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{v}\rangle$となる内積$\langle\cdot,\cdot\rangle$が$V$に存在するとき，$V$を**ユークリッド的**であるという．

ユークリッド的ジョルダン代数Vが非自明なイデアルを含まないならば，Vは**単純**であるという．ユークリッド的ジョルダン代数Vは単純イデアルの直和で一意にかけることが知られている（[1]，命題III.4.4)．単純なユークリッド的ジョルダン代数は，次の5種類しかないことがジョルダンら[4]によって示されている：$\mathrm{Herm}(n,\mathbb{A})$を要素が$\mathbb{A}$のエルミート行列の実ベクトル空間とする．$\mathbb{H}$は四元数の集合であり，$\mathbb{O}$は八元数の集合である．特に，$\mathrm{Herm}(n,\mathbb{R})$は$n\times n$実対称行列が作る空間である．

1．$\mathrm{Herm}(n,\mathbb{A})$で，$X\circ Y:=(XY+YX)/2$．ただし，$\mathbb{A}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$である．

2．$\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$で，$X\circ Y:=(XY+YX)/2$．

3．$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$で，$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}:=(x_0y_0+\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{y}_1,x_0\boldsymbol{y}_1^T+y_0\boldsymbol{x}_1^T)^T$．

したがって，ユークリッド的ジョルダン代数はこれら5種類の空間の直和で記述できる．

3．ユークリッド的ジョルダン代数と対称錐の関係

対称錐に関しては，“錐線形計画”のページを参照してほしい．特に，$\mathbb{R}^n$における対称錐Ωが既約であるとは，$\mathbb{R}^n=E_1\oplus E_2,\Omega=\Omega_1\oplus\Omega_2$を満たす非自明な部分空間$E_1,E_2$と対称錐$\Omega_1\subseteq E_1,\Omega_2\subseteq E_2$が存在しないことをいう．任意の対称錐$\Omega$は既約な対称錐の直積で一意に記述することが知られている（[1]，命題III.4.5)．

Vをユークリッド的ジョルダン代数とし，Ωをその閉包$\bar{\Omega}$が$\bar{\Omega}=\{\boldsymbol{x}^2 \mid \boldsymbol{x}\in V\}$となるように定める．次のことが知られている．

定理3.1.（[1]定理III.2.1，III章）$\bar{\Omega}$の内部は対称

わき　はやと，むらまつ　まさかず
電気通信大学 大学院情報理工学研究科
〒182-8585 調布市調布ケ丘1-5-1

錐になる．また，単純ユークリッド的ジョルダン代数と既約な対称錐の間には一対一の対応がある．

この定理と単純なユークリッド的ジョルダン代数が5種類あるという事実を用いると既約な対称錐は以下の5種類の錐で記述できる：

1. $n\times n$ 正定値実対称行列の集合．
2. $n\times n$ 正定値複素エルミート行列の集合．
3. 要素が四元数である $n\times n$ 正定値エルミート行列の集合．
4. 要素が八元数である $n\times n$ 正定値エルミート行列の集合．
5. 二次錐の内部：$\{\boldsymbol{x}=(x_0, \boldsymbol{x}_1^T)^T | x_0 > \|\boldsymbol{x}_1\|_2\}$．

したがって，対称錐は上記の集合の直積で記述できる．

4. ユークリッド的ジョルダン代数と対称錐の例

例 4.1. $n\times n$ 実対称行列が作る空間 V で，積$\circ$を

$$X\circ Y=\frac{XY+YX}{2}$$

と定めると，単位元 $\boldsymbol{e}=I_n$ であり V はジョルダン代数となる．このとき，階数 r は n である．また，このときにできる対称錐 Ω は，$n\times n$ 正定値実対称行列が作る錐である．

例 4.2. $V=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ で，$\boldsymbol{x}=(x_0, \boldsymbol{x}_1^T)^T$, $\boldsymbol{y}=(y_0, \boldsymbol{y}_1^T)^T\in V$ に対して積$\circ$を

$$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=(x_0y_0+\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{y}_1, x_0\boldsymbol{y}_1+y_0\boldsymbol{x}_1)^T$$

と定める．単位元 $\boldsymbol{e}=(1, \boldsymbol{0}^T)^T$ である．V の階数 r は n ではなく2になることに注意してほしい．$\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle=x_0y_0+\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{y}_1$ は内積であり，V はユークリッド的ジョルダン代数となる．また，このときできる対称錐は，二次錐の内部である．

5. 主双対内点法との関係

V を階数 r の有限次元ユークリッド的ジョルダン代数とする．また，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を V の内積とする．次の対称錐上の線形計画を考える：

$$\inf\{\langle\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}\rangle | \langle\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle=b_i (i=1, \cdots, m), \boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}\} \qquad (1)$$

ここで，$\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c}\in V, b_i\in\mathbb{R}, \Omega$ を $\bar{\Omega}=\{\boldsymbol{x}^2|\boldsymbol{x}\in V\}$ となるように定める．定理3.1より，$\bar{\Omega}$ の内部は対称錐である．(1)の双対問題は以下のようになる：

$$\sup\{\sum_{i=1}^{m} b_iy_i | \boldsymbol{s}=\boldsymbol{c}-\sum_{i=1}^{m} y_i\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{s}\in\bar{\Omega}\} \qquad (2)$$

対称錐上の線形計画は，錐線形計画である．したがって，弱双対定理だけでなく，実行可能内点解に関する仮定を満たせば，強双対定理も満たす．詳細は“錐線形計画”を参照してほしい．また，すでに述べた対称錐の分類から，線形計画問題，二次錐計画問題や半正定値計画問題は対称錐上の錐線形計画であるといえる．

Nesterov and Todd[6]は自己変換的障壁関数(self-scaled barrier function) を用いて，主双対内点法を適用できる凸最適化問題を提案した．Güler[3]は彼らの扱った凸最適化問題が，対称錐上の線形計画そのものであることを示した．また，Faybusovich[2]は，対称錐上の線形計画に対してパス追跡型の主双対内点法を提案している．より詳細な解析は，文献[5][8]で行われている．例えば，対称錐上の線形計画に対するパス追跡型の主双対内点法の反復回数は有限次元ユークリッド的ジョルダン代数 V の次元ではなく，階数 r に依存することが証明されている．

参考文献

[1] J. Faraut and A. Korányi, Analysis on Symmetric Cones, OXFORD SCIENCE PUBLICATIONS, 1994.

[2] L. Faybusovich, Euclidean Jordan Algebras and Interior-point Algorithms, Positivity, Vol. 1, 331-357, 1997.

[3] O. Güler, Barrier functions in interior point methods, Mathematics of Operations Research, Vol. 21, No. 4, 860-885, 1996.

[4] P. Jordan, J. V. Neumann and E. Wigner, On algebraic generalization of the quantum mechanichal formalism, Ann. of Math., 35, 29-64, 1934.

[5] M. Muramatsu, On a Commutative Class of Search Directions for Linear Programming over Symmetric Cones, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 112, No. 3, 595-625, 2002.

[6] Y. E. Nesterov and M. J. Todd, Self-scled barriers and interior-point methods for convex programming, Mathematics of Operations Research, Vol. 22, No. 1, 1-42, 1997.

[7] Y. E. Nesterov and M. J. Todd, Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones, SIAM Journal on Optimization, Vol. 8, No. 2, 324-364, 1998.

[8] S. H. Schmieta and F. Alizadeh, Extension of primal-dual interior point algorithms to symmetric cones, Mathematical Programming, 96, 409-438, 2003.