論文・研究レポート

ナーススケジューリング問題における混合整数線形計画問題と充足可能性判定問題による厳密解法の比較

乾　伸雄，池上　敦子

1. はじめに

ナーススケジューリング問題（Nurse Scheduling Problem: NSP）は病院における看護師の勤務シフトを決定する問題である（巻末付録に勤務表例）．健全な看護師の勤務環境を保ちつつ，人命を守るという観点から質の高い勤務表を作成することは重要であり，問題の分析と解法について多くの研究が行われている[3]．我々は，近年の性能向上が著しい汎用ソルバーを用い，厳密解が求められていないNSPのベンチマーク問題に挑戦したので，その結果を報告する．

NSPは組合せ最適化問題の一つであり，なるべく多くの制約を満たすことを目的としている[13]．NSPは二つの側面より研究されている．一つ目は，NSPを特徴づける研究である[9][17]．NSPで求められているものは実用的な勤務表の作成であり，聞き取り調査や過去の勤務表を参考に制約が決定される．勤務表は人間から見て満足するものでなければならないため，良い解を導く目的関数と制約の重要性についての議論が必要である[13]．二つ目は，NSPを解く研究である．NSPを解くことの難しさは，NSPがNP困難問題の一つであることに由来する[3]．NSPを対象にした解法は，厳密解法[1]や近似解法[4][8][12][17]の側面から非常に多くの研究が行われている．

本論文は，二つ目の課題に関して，厳密解を求める研究である．NSPに関してはベンチマーク[2][6]が公開されているので，これを解くことで解法を評価する．解法に関して，本論文は他の多くの論文とは異なり，新たなアルゴリズムを提案するものではなく，既存のソルバーを使ってNSPを解く．これにより，性能向上が著しいソルバーのNSPに対する有効性を評価する．

まず，NSPを混合整数線形計画問題（Mixed-Integer Linear Programming: MIP）により記述する．MIPを使って解いた例としては1997年の論文[16]が存在するが，最近では，“Just MIP it!”[7]という論文が出版されるほどにMIPソルバーの性能向上は著しい．そのため，列生成法を使った解法[1]のようにアルゴリズムの一部としてソルバーを使うのではなく，NSPを一つのMIPの問題として扱っても解ける可能性が高まっている．

次に，充足可能性判定問題（Satisfiability Problem: SAT）により記述する．NSPに関しては，一般的な制約充足問題（Constraint Satisfaction Problem: CSP）を使った研究が多く行われている[14]．SATはCSPの一種であり，命題論理に特化した問題を扱う．毎年開かれるSAT competition[15]を通して高速化に関する開発が進んでおり，ORの問題に適用する試みが行われている[10]．NSPに関してもSATを使った研究は行われた[11]．この研究では，自前のSATソルバーに制約違反の最小化機能を実現しているが，本論文ではブラックボックスとしてSATソルバーを使うことで解を得る．そして，同じ厳密解法であるMIPと比較する．本研究は，ソルバーを使って解いたときのNSPの困難さを理解する上で意味があると考える．

2. 記号の説明

本論文で扱う記号を説明する．Nは看護師の集合，

いぬい　のぶお
総合研究大学院大学 複合科学研究科
〒101-8430 千代田区一ツ橋 2-1-2
いけがみ　あつこ
成蹊大学 理工学部
〒180-8633 武蔵野市吉祥寺北町 3-3-1
受付 10.5.31　採択 10.10.4

D はスケジュール期間中の日の集合であり，30 日間の場合は $D=\{1, 2, \cdots, 30\}$ となる．T は勤務シフトの集合を表す．H はスケジュール期間中における土曜日となる日の集合である．G は看護師グループへのインデックス集合を表し，インデックス $g \in G$ について，そのグループに属する看護師集合を N_g とする．看護師グループは，看護師の医療における専門分野，技術の習熟度，担当患者で決定される．$d \in D, n \in N, t \in T$ に対し $<d, n, t>$ は d 日における看護師 n の勤務シフトが t であることを示す．連続勤務パタンを $t_0 t_1 \cdots$ により参照する．例えば，夜勤の後に休暇である連続勤務パタンは“夜休”と表現され，t_0＝夜，t_1＝休となる．d 日の勤務シフトが夜勤ならば $d+1$ 日の勤務シフトは休暇になる．

3．ベンチマークにおける NSP

本節では，ベンチマーク[6]で採用されている制約を示す．括弧内にはその制約によって決定される定数と集合を示す．これらは次節から説明する定式化で利用する．添字に関して，$d \in D, n \in N, t \in T, g \in G$ とする．

(a) 勤務シフトごとの最小・最大連続回数 (c_t^1, c_t^2)
(b) 勤務シフトごとの最小・最大間隔 (c_t^3, c_t^4)
(c) 禁止連続勤務パタン (P)
(d) 各日，グループ，勤務シフトの最小・最大人数 (c_{dgt}^5, c_{dgt}^6)
(e) 各看護師，勤務シフトの最小・最大回数 (c_{nt}^7, c_{nt}^8)
(f) 各看護師の土日休暇の最小・最大回数 (H, c_n^9, c_n^{10})
(g) 前月の勤務表（各看護師の前月末勤務実績）
(h) 各看護師についての希望勤務 (L^+)
(i) 各看護師についての希望しない勤務 (L^-)

これらの中で，(d)はシフト拘束条件，(a)，(b)，(c)，(e)，(f)，(h)，(i)は看護師拘束条件と呼ばれている[8]．勤務シフトは日勤と夜勤からなる 2 シフト，日勤，準夜勤，深夜勤からなる 3 シフトが代表的である．休暇およびその他（例えば，セミナー）も勤務シフトとして扱われる．(d)では看護師グループを使ってすべての日について必要な看護師の人数の下限 c_{dgt}^5 と上限 c_{dgt}^6 が規定される．(a)において勤務シフト t は c_t^1 日間以上 c_t^2 日間以下連続するという形式で連続日数の条件が記載される．(b)では，勤務シフト t は間を c_t^3 日以上 c_t^4 日以下空けるという条件が記載される．(c)では，夜勤の翌日の日勤（連続勤務パタンでの表現は“夜日”）は禁止するなどの禁止される連続勤務パタン集合 P が規定される．スケジュール期間において，(e)は勤務シフト t の実施回数の下限 c_{nt}^7 と上限 c_{nt}^8,(f)は土日連続休暇の取得回数の下限 c_n^9 と上限 c_n^{10} を規定する．(g)の前月のスケジュールは月の上旬の勤務表を制約する条件となる．(h)，(i)は各看護師について特定の日について割り当てられる，あるいは割り当てられない勤務シフトを示しており，$<d, n, t> \in L^+$, $<d, n, t> \in L^-$ となる，L^+ と L^- が規定される．

上記すべての条件を満たす勤務表が作成されることが望ましいが，NSP では作成可能であることは保証されない．ロバストに勤務表を作成するため，本論文では，文献[9]を参考にシフト拘束条件(d)を緩和可能な制約とし，過不足を認める．これにより，本論文では勤務表作成の目的関数を過不足人数の総和の最小化とした．本論文では，現実性を考慮して，各日，各勤務シフト，各グループに割り当てられた人数について過不足 1 名まで認めることとした．

4．MIP による問題の定式化

MIP は組合せ最適化問題を扱う手法としては一般的であり，多くの研究事例がある．MIP においては，制約条件は線形（不）等式によって表現され，一部の変数は整数拘束される．図 1 に 3 節で述べたベンチマークの MIP による表現を示す（この定式化は 0-1 整数計画問題となっているが，本論文では MIP の意味を拡大解釈し，すべての変数が整数拘束または 0-1 拘束されるものも含むとして話を進める）．NSP の制約は複雑であり，直接問題を解く定式化においては制約の性質に応じて式の形を工夫することも効率に影響する．

変数 z_{dgt}（定義は(17)式）は，d 日の看護師グループ g の勤務シフト t で過不足が発生する場合は 1 となる．目的関数(1)式は z_{dgt} の和を最小化する．この目的関数値のことを本論文では**ペナルティ**と呼ぶ．

変数 x_{dnt} は，d 日の看護師 n の勤務シフトが t の場合は 1，そうでない場合は 0 となる 2 値整数変数（定義は(15)式）である．d が 0 以下の場合は前月勤務表（制約(g)）を参照し，値を決定する（例えば，0 日は前月の末日を表す）．

(2)式は各看護師について各日の勤務で必ず一つの勤務シフトを決定することを表している．制約(a)に関して，(3)式は勤務シフト t が c_t^1 日以上連続することを示す．d 日が勤務シフト t ではなく，$d-1$ 日が勤務

$$\text{minimize} \sum_{d\in D}\sum_{g\in G}\sum_{t\in T} z_{dgt} \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{t\in T} x_{dnt}=1,\ d\in D,\ n\in N \tag{2}$$

$$\sum_{i=2}^{c_t^1} x_{(d-i)nt}-(c_t^1-1)x_{(d-1)nt} + (c_t^1-1)x_{dnt}\ge 0,\ d\in D,\ n\in N,\ t\in T \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{c_t^2} x_{(d-i)nt}\le c_t^2,\ d\in D,\ n\in N,\ t\in T \tag{4}$$

$$x_{(d-c)nt}-\sum_{i=1}^{c-1} x_{(d-i)nt}+x_{dnt}\le 1,\ d\in D,\ n\in N,\ t\in T,\ c\in\{2,\cdots,c_t^3\} \tag{5}$$

$$\sum_{i=0}^{c_t^4} x_{(d-i)nt}\ge 1,\ d\in D,\ n\in N,\ t\in T \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{k} x_{(d+i-k)nt_i}\le k,\ t_0\cdots t_k\in P,\ d\in D,\ n\in N \tag{7}$$

$$\sum_{n\in N_g} x_{dnt}+z_{dgt}\ge c_{dgt}^5,\ d\in D,\ g\in G,\ t\in T$$

$$\sum_{n\in N_g} x_{dnt}-z_{dgt}\le c_{dgt}^6,\ d\in D,\ g\in G,\ t\in T \tag{8}$$

$$\sum_{d\in D} x_{dnt}\ge c_{nt}^7,\ n\in N,\ t\in T$$

$$\sum_{d\in D} x_{dnt}\le c_{nt}^8,\ n\in N,\ t\in T \tag{9}$$

$$\sum_{d\in H} y_{dn}\ge c_n^9,\ n\in N$$

$$\sum_{d\in H} y_{dn}\le c_n^{10},\ n\in N \tag{10}$$

$$2y_{dn}-x_{dn\text{休}}-x_{(d+1)n\text{休}}\le 0,\ d\in H,\ n\in N \tag{11}$$

$$y_{dn}-x_{dn\text{休}}-x_{(d+1)\text{休}}\ge -1,\ d\in H,\ n\in N \tag{12}$$

$$x_{dnt}=1,\ <d,n,t>\in L^+ \tag{13}$$

$$x_{dnt}=0,\ <d,n,t>\in L^- \tag{14}$$

$$x_{dnt}\in\{0,1\},\ d\in D,\ n\in N,\ t\in T \tag{15}$$

$$y_{dn}\in\{0,1\},\ d\in H,\ n\in N \tag{16}$$

$$z_{dgt}\in\{0,1\},\ d\in D,\ g\in G,\ t\in T \tag{17}$$

図1　MIP による定式化（11，12 で t＝休は休暇）

シフト t のとき，$d-2$ 日から前に少なくとも c_t^1-1 日間勤務シフト t が連続することを表現しており，連続数の下限を守る．(4)式は勤務シフト t が c_t^2 日を超えて連続しないことを示す．$d-(C_t^2+1),\cdots,d$ 日のすべてが勤務シフト t ではないことで表現する．制約(b)に関して，(5)式は勤務シフト t の最小間隔が c_t^3 であることを示す．例えば，$c_t^3=3$ の場合は中 2 日および中 1 日で勤務シフト t を行うことはできない（連続での勤務は，最大連続勤務日数の条件を満たす限り認められる）．中 2 日での勤務シフト t の禁止は，$d-3$ 日と d 日が勤務シフト t ならば，$d-2$ 日あるいは $d-1$ 日に勤務シフト t を割りつけることで記述できる．また，中 1 日での勤務シフト t の禁止も，$d-2$ 日と d 日（ならびに $d-3$ 日と $d-1$ 日）が勤務シフト t ならば，$d-1$ 日（$d-2$ 日）に勤務シフト t を割りつけることで記述できる．(6)式は最大間隔に関する制約であり，c_t^4 日間には必ず一回勤務シフト t の日があることを示し，c_t^4+1 日以上の間隔が空かない条件となる．制約(c)に関し，(7)式は，連続勤務禁止パタン $t_0\cdots t_k$ がどの連続した日をとっても出現しないようにする．制約(d)に関し，(8)式は，d 日におけるグループ g の勤務シフト t に対する最小人数 c_{dgt}^5 に関する制約および最大人数 c_{dgt}^6 に関する制約を表している．これらは，3 節で述べたようにロバストに勤務表を出力するため，一人までの過不足 z_{dgt} を認めることによって緩和している．

(9)式は，スケジュール期間に関する勤務シフト t の勤務数を制約している（制約(e)）．(10)式～(12)式は土日に連続して休暇を取る回数を制約している（制約(f)）．y_{dn}（d は土曜日）は，1 ならば土日に看護師 n が休暇を取り（(11)式），逆に土日連休を取るならば 1 となる（(12)式）2 値整数変数である．y_{dn} は(16)式で定義されている．制約(h)，制約(i)に関する(13)式，(14)式は，L^+ と L^- を使って特定の日の看護師の勤務シフトを制約する．

本論文で扱うベンチマークは一カ月をスケジュール期間とし看護師の数も多いため，6 節で述べるように非常に多い制約条件を含む問題を解く必要がある．しかしながら，最近の MIP ソルバーの進歩はめざましく，変数・制約式の数は十分に取り扱えるものとなっていると考えている．

5.　SAT による問題の定式化

SAT は命題論理に基づき，論理式が真か偽かを証明する．論理式が真となるような論理変数の真偽値が存在するなら充足可能と呼び，それ以外の場合を充足不可能と呼ぶ．4 節で述べた MIP による定式化において，2 値整数変数が論理的に用いられている制約は容易に SAT の論理式に変換可能である．これに対し，人数や勤務数の和に関する制約は直接 SAT に変換できない．従来研究[11]では，和を求めるのではなく，「可能でない組合せを列挙する」方法を用いて表現した．これに対して，ペナルティに関する過不足数の扱いを容易にするため，本論文では，真を 1，偽を 0 として，明示的に和を計算する．

図 2 に SAT による定式化を示す．図 1 に対応して式番号をつけ，論理和 (∨)，論理積 (∧)，含意 (→)，否定 ($\bar{X}$) を用いて論理式を示す．MIP ですべての制約式は満たされなければならないのと同様に，SAT ではすべての論理式は真でなければならない．

MIP と異なり，SAT は最小化問題を直接解くことができない．そのため，NSP の SAT による解法では，ペナルティ（論理変数 Penalty）を 0, 1, … と順

表1　NSPのベンチマーク（*SATに関してはペナルティが0のときの数を示す）

	シフト	看護師	日数	勤務シフト	グループ	備考	MIP制約	MIP変数	SAT制約*	SAT変数*
2s	2	28	30	5	9	―	16,318	6,472	607,157	172,852
3s1	3	25	30	5	8	―	14,463	5,770	515,166	149,485
3s2						↑希望追加	14,490		515,193	
3s3						↑希望追加	14,525		515,228	
2sa	2	35	31	5	17	土日制約なし	26,231	9,641	1,123,946	322,214

$$\textstyle\sum_{d\in D}\sum_{g\in G}\sum_{t\in T}Z_{dgt}\leq Penalty \quad (1')$$

$$\vee_{t\in T}X_{dnt},\ d\in D,\ n\in N$$

$$\overline{X_{dnt_1}}\vee\overline{X_{dnt_2}},$$

$$d\in D,\ n\in N,\ t_1,\ t_2\in T,\ t_1\neq t_2 \quad (2')$$

$$X_{(d-i)nt}\vee\overline{X_{(d-1)nt}}\vee X_{dnt},$$

$$d\in D,\ n\in N,\ t\in T,\ i\in\{2,\cdots,c_t^1\} \quad (3')$$

$$\vee_{i=0}^{c_t^2}\overline{X_{(d-i)nt}},\ d\in D,\ n\in N,\ t\in T \quad (4')$$

$$\overline{X_{(d-i)nt}}\vee_{j=1}^{i-1}X_{(d-j)nt}\vee\overline{X_{dnt}},\ d\in D,$$

$$n\in N,\ t\in T,\ i\in\{2,\cdots,c_t^3\} \quad (5')$$

$$\vee_{i=0}^{c_t^4}X_{(d-i)nt},\ d\in D,\ n\in N,\ t\in T \quad (6')$$

$$\vee_{i=0}^{k}\overline{X_{(d+i-k)nt_i}},\ t_0\cdots t_k\in P,\ d\in D,\ n\in N \quad (7')$$

$$c_{dgt}^5-Z_{dgt}\leq\textstyle\sum_{n\in N_g}X_{dnt}\leq c_{dgt}^6+Z_{dgt},$$

$$d\in D,\ g\in G,\ t\in T \quad (8')$$

$$c_{nt}^7\leq\textstyle\sum_{d\in D}X_{dnt}\leq c_{nt}^8,\ n\in N,\ t\in T \quad (9')$$

$$c_n^9\leq\textstyle\sum_{d\in H}Y_{dn}\leq c_n^{10},\ n\in N \quad (10')$$

$$\overline{Y_{dn}}\vee X_{dn休},\ d\in H,\ n\in N$$

$$\overline{Y_{dn}}\vee X_{(d+1)n休},\ d\in H,\ n\in N \quad (11')$$

$$Y_{dn}\vee\overline{X_{dn休}}\vee\overline{X_{(d+1)n休}},\ d\in H,\ n\in N \quad (12')$$

$$X_{dnt},<d,\ n,\ t>\in L^+ \quad (13')$$

$$\overline{X_{dnt}},<d,\ n,\ t>\in L^- \quad (14')$$

図2　SATによる定式化（11'，12'でt=休は休暇）

に増やしていき，最初に充足可能な問題の解を出力する．2値整数変数 x_{dnt}, y_{dn}, z_{dgt} に対し，真偽値を表す論理変数 X_{dnt}, Y_{dn}, Z_{dgt} を用いる．これを使うことで，例えば，(2)式は(2')式のように表現できる．(2')式は，勤務シフトが少なくとも一つ選ばれる式と，任意の二つの勤務シフトの少なくともどちらかが偽である式から構成されている．上下限値を表現する(8')式～(10')式および目的関数(1')式で算術和を求める．

SATにおいては算術和を2進数全加算器によって表現することができるが，NSPのベンチマークにおいてその値がそれほど大きくないことから，各数字に対応する論理変数を導入する．これによって，上限値，下限値を考慮した算術和を容易に計算できる．今，m 個の論理変数の算術和を s_m とおくと，$s_m\in\{0,1,\cdots,m\}$ となる．ここで，m 番目の論理変数 X_m が与えら

$$S_0^m\to S_0^{m-1}\wedge\overline{X_m} \quad (18)$$

$$\overline{S_0^m}\to\overline{S_0^{m-1}}\vee X_m \quad (19)$$

$$S_i^m\to(S_{i-1}^{m-1}\wedge X_m)\vee(S_i^{m-1}\wedge\overline{X_m}),$$

$$i\in\{1,\cdots,m-1\} \quad (20)$$

$$\overline{S_i^m}\to(\overline{S_{i-1}^{m-1}}\vee\overline{X_m})\wedge(\overline{S_i^{m-1}}\vee X_m),$$

$$i\in\{1,\cdots,m-1\} \quad (21)$$

$$S_m^m\to S_{m-1}^{m-1}\wedge X_m \quad (22)$$

$$\overline{S_m^m}\to\overline{S_{m-1}^{m-1}}\vee\overline{X_m} \quad (23)$$

$$\vee_{i=\max(c_{\min}+m-M,0)}^{\min(c_{\max},m)}S_i^m$$

$$\overline{S_i^m},\ i\in\{0,\cdots,\max(c_{\min}+m-M,\ 0)-1\}$$

$$\overline{S_i^m},\ i\in\{\min(c_{\max},\ m)+1,\cdots,m\} \quad (24)$$

図3　SATにおける算術加算 $s_m\leftarrow s_{m-1}+X_m$

$$\vee_{i=\max(c_{dgt}^5+m-M,0)-1}^{\min(c_{dgt}^6,m)+1}S_i^m$$

$$\overline{S_i^m},\ i\in\{0,\cdots,\max\{c_{dgt}^5+m-M,\ 0)-2\}$$

$$\overline{S_i^m},\ i\in\{\min(c_{dgt}^6,\ m)+2,\cdots,m\}$$

$$S_{\max(c_{dgt}^5+m-M,0)-1}^m\vee S_{\min(c_{dgt}^6,m)+1}^m\to Z_{dgt} \quad (24')$$

図4　上下限値の制約違反の表現

れたときに，$s_m\leftarrow s_{m-1}+X_m$ を計算しよう（$s_0=0$）．s_m が取り得る値に対応し論理変数 $S_0^m, S_1^m, \cdots, S_m^m$ を定義する．これらはちょうど一つだけ真となり，$s_m=i$ ならば S_i^m が真となる．この計算は図3のように与えられる．M を論理変数の数，$c_{\min}$, $c_{\max}$ を算術和の下限値，上限値とする．(18)式，(19)式は0および0以外になる条件，(20)式，(21)式は i およびそれ以外になる条件，(22)式，(23)式は m および m 以外になる条件を表している．(24)式は上下限値内に算術和を収めるための条件である．

(1')式と(8')式において使われる Z_{dgt} は，上下限値を一つ広げる，つまり，一人の過不足を表現する．これを表現するために(24)式の代わりに図4の(24')式を用いる．

M 個の論理変数の算術和では $O(M^2)$ 個の論理変数が必要であり，MIPに比べ，SATでは論理変数の数・論理式が非常に多くなる．実用的な規模のNSPに対して現在のSATソルバーが適用可能であるかを

6節では検証する．

6．数値実験

本節ではベンチマークを解き，計算時間を比較する．1節で述べたように，最近のMIPソルバーの性能向上は著しいため，困難なベンチマークが高速に解ける可能性がある．分枝限定法を使ったMIPソルバーでは，最小化問題の場合，下界値と暫定値が一致したとき最適解となる．下界値はそれより小さい値では実行可能解が存在しないことを表す．暫定値はそれまでに見つかった実行可能解の中での最小の目的関数値である．下界値と暫定値のギャップが0になりやすいかどうかが実行時間に大きく影響する．一方，SATは論理変数の真偽値だけで探索を行うため，下界値を定めることに関しては，整数変数が小数となる空間も探索してしまうMIPより効率的な可能性がある．

実験データとしてはNSPのベンチマークである Ikegami_2 shift（2 s）および Ikegami_3 shift（3 s）[6][8]および Ikegami_2 shift_a（2 sa）を用いる（表1参照）．これらは，日本の病院の調査から作成されたものであり，勤務実態がよく反映されている問題である．3 sはさらに看護師の希望勤務の有無により3種類の問題に分かれる（3 s 1，3 s 2，3 s 3）．3 sは2009年10月で最適解がわかっていなかった問題である．表2にこの問題に対するペナルティを示した．この表の結果が示すように，本論文の手法により見つかった厳密解であるペナルティは近似解法から予想される比較的大きなペナルティの解とは大きく異なるものであった．2 saは2シフト問題で土日連続休暇に関する制約(f)がない問題である．

実験では，MIPソルバーとしてCPLEX 12.0を使い，Intel QuadCore 2.8 GHzのPCによって実行する．SATソルバーとしては，CLASP 1.3.0[5]を使い，Intel DualCore 2.4 GHzのPCによって実行した．

2 sおよび2 saと3 sの最も大きな違いは，勤務シフトである．シフト数は両者ともに5種類であるが，2 sが「休暇」，「日勤」，「夜勤1」，「夜勤2」，「その他」であるのに対し，3 sは「休暇」，「日勤」，「準夜勤」，「深夜勤」，「その他」である．夜勤2は夜勤1の翌日に続く勤務であり，この二つで2交代制の一つの夜勤を表しているので，実質的に勤務シフトは4種類である．表1に示したベンチマークのデータに関して，変数の数，制約式の数がそのまま問題の難しさとなるわけではないが，SATでは算術和を求めるのに多くの論理変数・論理式を必要とする．そのため，MIPに比べて，これらの数が非常に多くなっている．

表2 3シフト問題の暫定解発見の歴史

年 (発見者)	3s1	3s2	3s3
2003(池上)[8]	6	13	12
2009/9(Curtoise)[6]	5	9	11
2009/11(乾，前田，池上)[6]	2	4	3
本論文 (SATによる厳密解)	2	3	3

表3 MIPによる実行時間（秒）（2時間まで実行）

	下限値		暫定値	
	ペナルティ	時間	ペナルティ	時間
2s	0	6	0	20
3s1	1	88	2	324
3s2	2	111	4	1109
3s3	2	127	3	661
2sa	19	6	19	20

表4 SATによる実行時間（秒）（下線は充足可能）

ペナルティの上限	0	1	2	3	4
2s	<u>41</u>	<u>45</u>	<u>16</u>	<u>27</u>	<u>18</u>
3s1	6	14	<u>32</u>	<u>39</u>	<u>65</u>
3s2	4	7	16	<u>77</u>	<u>62</u>
3s3	3	8	16	<u>100</u>	<u>42</u>

表3にMIPに関して2時間以内に求められた最善の下界値と暫定値および実行時間を示す．下界値と暫定値が等しいときは最適解である．MIPは2 sおよび2 saを解くのには有効であったが，3 sを解くのには非力であった．次に述べるSATの結果からわかる最適解から考えて，MIPによる結果は3 s 2を除いて最適なペナルティを見つけているが，下界値はこれと等しくならなかった．

ペナルティは0未満にならないので，2 sについては暫定値0の解を見つけた時点でMIPの実行は終了する．これに対して，3 sは暫定値以下の実行可能解がないことを証明する必要があり，これに計算時間の大半をかけている．2 saは最適解のペナルティが大きい問題であるが，最適解に対する下界値が短時間で求まっている．3 sで土日休暇の制約を除いても実行時間に違いが見られないことから，MIPでは実質的な勤務シフト数が実行時間に大きな影響を与えていると考えられる．

表4にSATの計算時間を示す．SATは2 sと2 saでMIPよりも実行時間が長いものの，MIPでは最適解が見つからない3 sのすべての問題に対して，最適解を出力することができた．図5に2 saのSATに対する結果を示す．2 saはペナルティが大きい問題であ

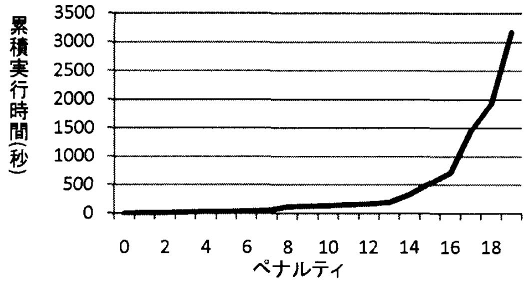

図5 SATによる2saの実行時間

るため，SATの適用回数が多い．

このように，SATはMIPが解くことができなかった3sを短時間で解くことができるが，MIPが短時間で解くことができた2saに対しては実行時間がかかることがわかった．2saに対しても小さいペナルティの問題が充足不可能であることを短時間で判定できることから，SATの適用ではペナルティの大きさが時間に大きな影響を与えると思われる．

最後に3s1についてSATが生成した勤務表を付録に添付した[1]．勤務表を人手で作成することは多大な労力を要する作業であることが理解されるだろう．本論文は入手可能な汎用ソルバーを用いて現実的な時間内にNSPの厳密解が求められることを示したと考えている．

7. おわりに

本論文ではNSPのベンチマークを対象に，MIPおよびSATによる定式化および解法の評価を行った．その結果，MIPでは解きにくい3シフト問題をSATによって短い時間で解くことができた．ただし，問題によってはMIPの方が優れている場合もあるため，現状では問題によって使い分けて利用することが最良である．これまで，近似解を求める研究は多くなされ，実用的に使われてきたが，本論文の結果は，厳密解の利用が現実的になったことを示している．

謝辞 本論文についてご助言を頂いた査読者・編集委員の先生方に心より感謝いたします．この研究の一部は，文部科学省私立大学戦略的研究基盤形成支援事業研究費を受けて行われました．

[1] 看護師1, 2, 3, 4, 5, 6がグループであるg4の12日，および看護師14, 15, 16, 17, 18, 25がグループであるg6の13日に準夜勤の人数が0人になっている（必要人数は一人あるいは二人）．勤務表を各行で見た場合，各ナースのスケジュールに関する条件はすべて満たしている．

参考文献

[1] J. F. Bard and H. W. Purnomo: "Preference Scheduling for Nurses using Column Generation", European Journal of Operational Research, **164**, **2**, 510-534 (2005).

[2] P. Brucker, E. Burke, T. Curtois, R. Qu and G. V. Berghe: "Adaptive Construction of Nurse Schedules: A Shift Sequence Based Approach", NOTTCS-TR-2007-1, University of Nottingham (2007).

[3] E. D. Burke, P. D. Causmaecker, G. V. Berghe and H. V. Landeghem: "The State of the art of Nurse Roestering", J. of Scheduling, 7, 441-499 (2004).

[4] E. Burke, J. Li and R. Qu: "A Pareto-Based Search Methodology for Multi-objective Nurse Scheduling", Annals of Operations Research, Springer (2008).

[5] CLASP: http://www.cs.unipotsdam.de/clasp/

[6] T. Curtois: "Staff Rostering Benchmark Data Sets", http://www.cs.nott.ac.uk/~tec/NRP

[7] M. Fischetti, A. Lodi and D. Salvagnin: "Just MIP it", Matheuristics—Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming—, 39-70, Springer (2009).

[8] A. Ikegami and A. Niwa: "A Subproblem-centric Model and Approach to the Nurse Scheduling Problem", Mathematical Programming, 97, 517-541 (2003).

[9] 池上敦子："ナース・スケジューリング—調査・モデリング・アルゴリズム—", 数理統計, **53**, **2**, 231-259 (2005).

[10] 越村三幸, 鍋島英和, 藤田博, 長谷川隆三："SAT変換による未解決ジョブショップスケジューリング問題への挑戦", スケジューリング・シンポジウム2009, 209-213 (2009).

[11] S. Kundo and S. Achayya: "A SAT Approach for Solving the Nurse Scheduling Problem", TENCON 2008, 1-6 (2008).

[12] K. Nonobe and T. Ibaraki: "A tabu search approach to the constraint satisfaction problem as a general problem solver", European Journal of Operational Research, 106, 599-623 (1998).

[13] 野々部宏司, 池上敦子："ナーススケジューリング問題における解の評価", スケジューリング・シンポジウム2009, 163-167 (2009).

[14] R. Qu and F. He: "A Hybrid Constraint Programming Approach for Nurse Rostering Problems", AI'08, 211-224 (2008).

[15] SAT Competitions: http://www.satcompetition.

org/

[16] J. R. Thornton and A. Sattar: "Nurse Rostering and Integer Programming Revisited", ICCIMA'97, 49-58 (1997).

[17] M. Vanhoucke and B. Maenhout: "On the Characterization and Generation of Nurse Scheduling Problem Instances", European Journal of Operational Research, 196, 2, 457-467 (2009).

付録　ベンチマーク3s1で生成された勤務表（/：休暇，－：日勤，e：準夜勤，n：深夜勤，＋：その他）

	日付																														グループ(所属に1)								勤務数				
看護師	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8	休暇	日勤	準夜勤	深夜勤	その他
1	/	-	-	n	n	/	/	-	e	/	-	e	n	n	/	/	-	-	e	e	/	-	-	-	-	/	/	-	-	-	1	1		1				1	9	13	4	4	0
2	n	/	e	e	/	-	-	e	/	e	e	/	+	-	/	-	e	/	-	-	n	n	/	/	-	-	-	-	/	-	1	1		1					9	11	6	3	1
3	-	/	-	-	/	/	-	n	n	/	/	-	-	/	-	e	n	n	/	/	-	-	e	e	n	n	/	/	-	e	1	1		1					10	10	4	6	0
4	e	e	/	-	-	-	e	/	-	-	/	/	-	-	n	n	/	/	-	+	-	e	n	n	/	/	-	-	e	/	1	1		1					9	11	5	4	1
5	-	n	n	/	e	e	/	-	-	n	n	/	/	/	-	-	-	e	/	-	e	/	/	/	/	-	e	e	n	n	1	1		1					10	8	6	6	0
6	/	-	-	/	-	n	n	/	/	-	-	-	e	e	e	/	/	-	n	n	/	/	-	-	e	e	n	n	/	/	1	1		1					10	9	5	6	0
7	/	-	-	-	n	n	/	e	e	/	-	-	-	e	e	/	-	-	e	e	/	-	-	/	n	n	/	/	/	-	1	1							9	11	6	4	0
8	e	e	n	n	/	/	-	-	-	+	e	/	-	-	-	-	/	-	-	-	e	/	-	-	/	/	n	n	/	/	1	1							9	12	4	4	1
9	/	/	-	-	/	-	-	/	-	-	-	/	/	/	-	-	e	e	/	-	n	n	/	e	e	/	-	-	-	-	1	1						1	10	14	4	2	0
10	+	/	/	/	-	-	e	/	n	n	/	/	-	-	/	+	-	-	-	-	/	/	-	-	-	e	e	/	e	e	1	1							10	11	5	2	2
11	-	-	e	e	/	-	-	-	/	e	n	n	/	/	-	+	-	/	/	/	/	-	-	/	-	-	/	e	n	n	1	1							10	11	4	4	1
12	-	-	-	-	e	e	/	/	/	-	-	n	n	/	/	+	-	-	-	/	-	-	-	/	/	-	-	-	/	/	1	1							10	15	2	2	1
13	-	-	/	-	-	-	+	-	/	/	/	e	e	/	-	e	n	n	/	/	-	e	e	/	/	/	-	-	-	-	1	1							10	12	5	2	1
14	-	/	-	-	e	e	e	/	-	+	/	/	/	-	e	n	n	/	/	-	-	e	e	n	n	/	/	-	-	-	1		1		1	1			9	10	6	4	1
15	-	-	e	/	-	-	/	-	n	n	/	e	e	/	-	e	/	/	-	e	e	n	n	/	/	-	-	/	-	n	1		1		1	1			9	10	6	5	0
16	e	e	/	-	n	n	/	e	e	/	-	-	+	n	n	/	/	-	e	/	+	-	/	-	-	e	/	n	n	/	1		1		1	1			9	7	6	6	2
17	/	-	n	n	/	/	-	-	/	e	e	/	+	-	-	/	-	n	n	/	/	-	-	e	e	/	e	e	/	-	1		1		1	1			10	9	6	4	1
18	/	/	-	e	/	-	n	n	/	/	/	-	-	e	/	-	e	e	/	+	-	/	-	-	-	n	n	/	e	e	1		1		1	1			10	9	6	4	1
19	-	-	-	/	/	-	+	/	-	-	-	/	-	-	-	+	-	e	/	-	e	/	/	/	/	/	-	-	-	-	1		1				1		10	16	2	0	2
20	n	n	/	/	/	-	-	e	/	/	-	-	-	-	e	e	/	/	/	-	-	-	-	/	-	e	/	-	-	+	1		1				1		10	13	4	2	1
21	/	-	e	/	-	e	e	/	e	e	/	-	-	/	n	n	/	/	-	-	-	e	n	n	/	/	/	-	-	+	1		1				1		10	9	6	4	1
22	+	e	/	-	-	/	n	n	/	/	-	-	e	e	/	-	-	-	/	-	-	/	-	-	-	-	e	/	/	+	1		1				1		9	13	4	2	2
23	-	-	-	e	e	/	-	-	/	/	-	e	n	n	/	/	/	-	e	e	/	-	-	-	e	/	/	/	-	+	1		1				1		10	11	6	2	1
24	e	/	/	-	-	/	-	-	-	-	e	/	-	-	-	-	e	/	n	n	/	/	-	-	/	/	-	e	/	-	1		1				1		10	14	4	2	0
25	n	n	/	/	-	-	-	/	/	-	n	n	/	/	/	-	-	-	-	n	n	/	e	e	/	-	-	-	e	e	1		1			1	1		9	11	4	6	0
割当合計 休暇	7	7	8	8	9	7	6	9	11	9	8	10	5	9	8	6	8	8	10	6	8	9	5	9	10	11	9	7	8	5													
日勤	9	11	10	10	9	11	10	9	7	7	10	8	10	9	10	8	10	10	8	10	9	9	13	9	8	7	9	11	10	9													
準夜勤	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4													
深夜勤	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3													
その他	2	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4													