二次錐計画

脇　隼人，村松　正和

二次錐計画は，錐線形計画の一つである．二次錐計画を解くアルゴリズムとしては主双対内点法があり，様々な工学上の応用問題が二次錐計画に定式化できることが知られている．本稿では，二次錐計画について簡単に紹介する．詳細を知りたい読者は文献[1][2][3][6]を参照してほしい．

1. 二次錐

二次錐 $\mathcal{Q}_n$ は，次のように定義される閉凸錐である：

$$\mathcal{Q}_n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\boldsymbol{x}_2^T)^T\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}\,|\,x_1\geq\|\boldsymbol{x}_2\|_2\}.$$

図1は，$n=2, 3$ の場合の図を示している．

二次錐 $\mathcal{Q}_n$ の内部 $\mathrm{int}(\mathcal{Q}_n)$ は

$$\mathrm{int}(\mathcal{Q}_n)=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\boldsymbol{x}_2^T)^T\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}\,|\,x_1>\|\boldsymbol{x}_2\|_2\}$$

と定義される．

二次錐 $\mathcal{Q}_n$ は自己双対である．つまり，$\mathcal{Q}_n$ の双対錐 $\mathcal{Q}_n^*$ が $\mathcal{Q}_n$ と一致する．さらに，等質錐（homogeneous cone）であるので，二次錐は対称錐である．対称錐については，ジョルダン代数や錐線形計画のページを参照してほしい．

2. 二次錐計画

k 個の二次錐 $\mathcal{Q}_{n_j}\,(j=1,\cdots,k)$ に対して，$\mathcal{Q}=\mathcal{Q}_{n_1}\times\cdots\times\mathcal{Q}_{n_k}$ とおく．また，$n=n_1+\cdots+n_k$ とおく．二次錐計画とは，次のように記述される最適化問題である：

$$\inf\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\,|\,A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{x}\in\mathcal{Q}\}. \tag{1}$$

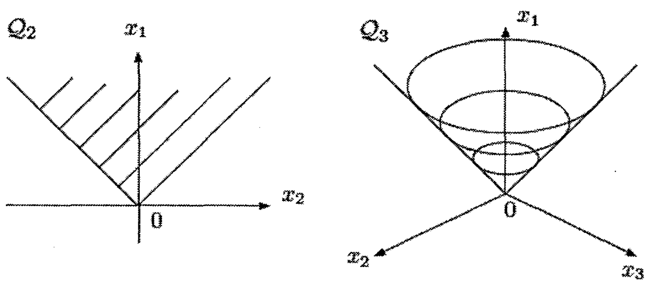

図1　$\mathcal{Q}_2$ と $\mathcal{Q}_3$

ここで，$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$ である．図1から，原点のところでは微分不可能であるので，二次錐計画は微分不可能な制約式を持つ凸計画問題である．

$\mathcal{Q}_n$ が自己双対であるので，二次錐計画(1)の双対問題は，以下のように記述される：

$$\sup\{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c}-A^T\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{s}\in\mathcal{Q}\}. \tag{2}$$

二次錐計画は錐線形計画なので，弱双対定理や強双対定理が成立する．

定理 2.1.（二次錐計画に対する弱双対定理）　$\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y})$ をそれぞれ(1)，(2)の実行可能解とすると，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{s}\geq 0$$

が成立する．

$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ を双対ギャップと呼ぶ．弱双対定理は，実行可能解では双対ギャップが常に非負であることを示している．

$\mathrm{int}(\mathcal{Q})=\mathrm{int}(\mathcal{Q}_1)\times\cdots\times\mathrm{int}(\mathcal{Q}_{n_k})$ である．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{x}\in\mathrm{int}(\mathcal{Q})$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を(1)の実行可能内点解と呼ぶことにする．また，$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c}-A^T\boldsymbol{y}\in\mathrm{int}(\mathcal{Q})$ を満たす $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y})$ を(2)の実行可能内点解と呼ぶ．

定理 2.2.（二次錐計画に対する強双対定理）　$\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y})$ をそれぞれ(1)，(2)の実行可能内点解とする．このとき，(1)，(2)には最適解 $\boldsymbol{x}^*, (\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{y}^*)$ が存在し，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^*$$

を満たす．

強双対定理に関しては実行可能内点解に関する仮定は必要である．文献[1][7]では，実行可能内点解を持たない二次錐計画に対して，強双対定理が成り立たない例が挙げられている．

3. 主双対内点法

二次錐計画は凸計画なので，理論的には非線形計画に対するアルゴリズムで最適値を求めることができる．しかしながら，微分不可能性を有しているので，この

わき　はやと，むらまつ　まさかず
電気通信大学 大学院情報理工学研究科
〒182-8585 調布市調布ケ丘 1-5-1

ようなアルゴリズムは実用的には有効ではない．

一方で，線形計画や半正定値計画と同様に，主双対内点法で二次錐計画の最適値を求めることができる．また，実用的にも有効である．二次錐計画に対する主双対内点法のアルゴリズムの詳細は文献[1][2]を参照してほしいが，例えば文献[10]では，実行可能内点解を持つ二次錐計画(1)に対して，NT 方向を用いたショートステップ・パス追跡法は，$O(\sqrt{k}\log(\epsilon^{-1}))$ の反復回数で双対ギャップが ϵ 以下の近似解が求められる，ということを示している．

二次錐計画に対する主双対内点法を実装したソフトウェアとして，2010 年時点では，MOSEK[4]，SDPT 3[8]，SeDuMi[9]などが知られている．ただし，MOSEK は商用のソフトウェアである．文献[5]によれば，2003 年時点で $m=130141$，$k=65341$，$n_j=4\ (j=1,\cdots,65341)$ の規模の二次錐計画(1)が解かれている．

4. 応用例

二次錐計画がよく研究されている理由の一つとして，表現力の高さが挙げられる．例えば，次の $(x,y,\boldsymbol{z}^T)^T\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-2}$ に関する制約式を考える：

$$\|\boldsymbol{z}\|_2^2\leq xy,\quad x\geq 0,\ y\geq 0.$$

この制約式は，$\mathbb{Q}_n$ を使って，

$$(x+y,\ x-y,\ 2\boldsymbol{z}^T)^T\in\mathbb{Q}_n \tag{3}$$

と書くことができる．

この事実を利用することで，$n\times n$ 半正定値対称行列 Q，$\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^n$，$r\in\mathbb{R}$ で構成される，$\boldsymbol{x}$ に関する凸二次不等式

$$\boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}+r\leq 0$$

は，二次錐を使って記述することができる．実際，Q は半正定値対称行列であるので，ある $n\times k$ 行列 L を使って，$Q=LL^T$ と書ける．したがって，この凸二次不等式は，

$$\|L^T\boldsymbol{x}\|_2^2\leq 1\cdot(-\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}-r)$$

と書くことができる．この不等式から $-\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}-r\geq 0$ なので，(3)において $x=1$，$y=-\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}-r$，$\boldsymbol{z}=L^T\boldsymbol{x}$ とおけば，

$$(1-\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}-r,\ 1+\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x}+r,\ 2\boldsymbol{x}^TL)^T\in\mathbb{Q}_{k+2}$$

と書くことができる．

また，分数型不等式制約も二次錐で記述できる場合がある．$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ は，線形制約 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}+b>0$ を満たしていると仮定する．このとき，$(\boldsymbol{x},t)$ に関する分数型不等式制約

$$\frac{1}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}+b}\leq t$$

も二次錐を使って記述することができる．実際，仮定より，$1\leq t(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}+b)$ である．したがって，(3)から

$$(t+\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x},\ t-\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x},\ 1)^T\in\mathbb{Q}_3$$

となり，$(\boldsymbol{x},t)$ に関する不等式制約を二次錐で記述することができる．

文献[3]ではこれらの変換を用いて，ロバスト線形計画やリスク制約を持つポートフォリオ最適化問題などの，様々な工学上の応用問題を二次錐計画に定式化できることを紹介している．

参考文献

[1] F. Alizadeh and D. Goldfarb, "Second-order cone programming," Mathematical Programming, Series B, 95, 3-51, 2003.

[2] 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博, "内点法," 経営科学のニューフロンティア 9, 朝倉出版, 2001.

[3] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd and H. Lebret, "Applications of second-order cone programming," Linear Algebra and its Applications, 284, 193-228, 1998.

[4] MOSEK, available at http://www.mosek.com/

[5] H. D. Mittelmann, "An Independent Benchmarking of SDP and SOCP solvers," Mathematical Programming, 95, 407-430.

[6] 田村明久, 村松正和, "最適化法（工系数学講座）," 共立出版, 2002.

[7] J. Renegar, "A Mathematical View of Interior-Point Methods for Convex Optimization," MPS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia, 2001.

[8] SDPT 3, available at http://www.math.nus.edu.sg/~mattohkc/sdpt3.html

[9] SeDuMi 1. 21, available at http://sedumi.ie.lehigh.edu/

[10] T. Tsuchiya, "A convergence analysis of the scaling-invariant primal-dual path-following algorithms for second-order cone programming," Optimization Methods and Software, 11 & 12, 141-182, 1999.