錐線形計画

吉瀬　章子

錐線形計画問題とは，与えられた閉凸錐 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ と線形制約のもとで，適当な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を最小化する問題

(P)　$\theta_P := \inf\{\langle c, x\rangle | Ax = b, x \in K\}$

$(A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n)$ である．本稿では，(1) 錐線形計画問題の例と双対定理，(2)障壁関数による錐の特徴付け，(3) NP 困難な非凸最適化問題の錐線形計画緩和について概説を与える．

1.　錐線形計画問題

錐線形計画問題は多くの問題群を含んでいる．K を n 次元非負領域 $\mathbb{R}^n_+$，あるいは n 次半正定値対称行列全体からなる錐 S^n_+ とすれば，(P) はそれぞれ線形計画問題，半正定値計画問題になる．さらに n 次元空間内における閉凸集合 Ω 上で凸関数 f を最小化する凸計画問題 $\inf\{f(x)|x \in \Omega\}$ も，ある $\tau^0 \in \mathbb{R}$ に対して，集合 $G_{\tau 0} := \{(x, \tau)| x \in \Omega, f(x) \leq \tau \leq \tau^0\}$ が有界ならば，$K := \{\varkappa(x, \tau, 1)|(x, \tau) \in G_{\tau 0}, \varkappa \geq 0\}$ は閉凸錐になり，この凸計画問題と等価な錐線形計画問題 $\inf\{\tau | \varkappa = 1, (x, \tau, \varkappa) \in K\}$ に帰着できる．

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^m$ 上の適当な内積，A^* を $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ をみたす A の随伴行列とし，K の双対錐を $K^* := \{s: \forall x \in K, \langle x, s\rangle \geq 0\}$ とすれば，(P) の双対問題は以下で与えられる．

(D)　$\theta_D := \sup\{\langle b, y\rangle | A^* y + s = c, s \in K^*\}$.

集合 S の内部を $\mathrm{int}\, S$ で表す．双対錐の定義より，(P) と (D) の間には弱双対定理 $\theta_P \geq \theta_D$ が成り立つが，さらに以下の強双対定理が成り立つ [8]．

定理 1．(錐線形計画問題の強双対定理)　双対問題 (D) に許容内点 ($A^* y + s = c, s \in \mathrm{int}\, K^*$ をみたす $(y; s)$) が存在し，主問題 (P) に許容解が存在するのであれば，主問題 (P) に最適解が存在する．同様に，主問題 (P) に許容内点（$Ax = b, x \in \mathrm{int}\, K$ をみたす x）が存在し，双対問題 (D) に許容解が存在するのであれば，双対問題 (D) に最適解が存在する．いずれの場合も最適値は一致し，$\theta_P = \theta_D$ が成り立つ．

2.　錐と障壁関数

線形計画問題や半正定値計画問題のように，閉凸錐 K によっては内点法で有効に最適解が求めることができる．このような錐 K の内部 $\mathrm{int}\, K$ 上には，以下の自己整合障壁関数（self-concordant barrier function）が存在する [7][8]．

定義 1．(自己整合障壁関数)　任意の $x \in \mathrm{int}\, K$ においてヘシアン $H(x)$ が正定値である 2 階連続微分可能な関数 $f: \mathrm{int}\, K \to \mathbb{R}$ に対して，距離 $\|u\|_x = \sqrt{\langle u, H(x)u\rangle}$ を定義する．すべての $v \neq 0$ について，$\|y - x\|_x < 1$ である任意の $x, y \in \mathrm{int}\, K$ における v の距離が以下をみたすとき，f を錐 K の自己整合障壁関数と呼ぶ．

$$1 - \|y - x\|_x \leq \frac{\|v\|_y}{\|v\|_x} \leq \frac{1}{1 - \|y - x\|_x}.$$

以下では自己整合障壁関数が存在する代表的な錐として，双曲錐（hyperbolic cone），等質錐（homogeneous cone），対称錐（symmetric cone）を紹介する．本来これらの錐は開集合として定義されるが，表記の便宜上，本稿ではこれらの集合の閉包として定義する．

定義 2．(双曲錐)　斉次多項式 $p: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ について，$p(e) > 0$ である方向 $e \in \mathbb{R}^d$ における 1 価関数 $p(x + te)(t \in \mathbb{R})$ が，任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して実数根のみもつとき，この多項式を方向 e における双曲多項式（hyperbolic polynomial）と呼ぶ．e を含む $\{x | p(x) \neq 0\}$ の連結成分の閉包 K を（p の方向 e に対する）双曲錐と呼ぶ．

K は閉凸錐であり，$\mathrm{int}\, K$ 上で定義される $-\log p(x)$ は，$\mathrm{int}\, K$ 上の自己整合障壁関数である [5]．双曲錐の集合は，以下の等質錐と対称錐の集合を部分集合として含む．

よしせ　あきこ
筑波大学 大学院システム情報工学研究科
〒305-8573 つくば市天王台 1-1-1

定義 3.（等質錐と対称錐） 凸錐 K の内部の任意の 2 点 $x, y \in \mathrm{int}\,K$ について，$y=Gx$ であり，$\{Gu|u \in K\}=K$ である正則な線形変換 G が存在するとき，K を等質錐と呼ぶ．等質錐 K が自己双対（すなわち $K=K^*$）であるとき，K を対称錐と呼ぶ．

対称錐は，ユークリッド的ジョルダン代数と 1 対 1 の関係があり，n 次対称半正定値行列からなる集合 S_+^n，2 次錐，n 次元空間の非負領域 $\mathbb{R}_+^n$ などが含まれる[4]．また，自己整合障壁関数の特殊例である自己変換的障壁関数（self-scaled barrier function）による錐の特徴付けは，対称錐と一致する．対称錐上の錐線形計画問題に対して，多くの主双対内点法が提案されている．

S_+^n，$\mathbb{R}_+^{n^2}$ ともに対称錐であるが，非負半正定値行列錐（doubly nonnegative cone）$D_n:=S_+^n \cap \mathbb{R}_+^{n^2}$ は対称錐，等質錐のいずれでもない双曲錐である．しかし，集合 $\{(X, Y) \in S_+^n \times \mathbb{R}_+^{n^2} | X=Y\}$ として D_n を表現できることから，双曲錐 D_n は高次の半正定値行列錐の「切り口」であると考えられる（$\mathbb{R}_+^{n^2}$ は S_+^1 の n^2 個の直積で与えられる）．この性質を一般化した命題「任意の双曲錐は高次の半正定値行列錐の『切り口』として与えることができる」は（一般化）Lax 予想と呼ばれる．$d=3$ までの双曲錐については Lax 予想が正しいことが証明されている[6]．また任意の等質錐も，適当な高次の半正定値行列の「切り口」として与えられることも示されている．

3. NP 困難な問題の錐線形計画緩和

最大カット問題や，2 次割当問題など，NP 困難な組合せ最適化問題に対して，半正定値行列錐 S_+^n 上の錐線形計画問題で緩和する数多くの手法が提案されている[1]．任意の $d \in \mathbb{R}^n$ について $d^TXd \geq 0$ であることが n 次対称行列 X が半正定値であるための条件であるが，この条件を緩めた，任意の非負ベクトル $d \in \mathbb{R}_+^n$ に対して $d^TXd \geq 0$ が成り立つ行列は共正値行列（copositive matrix）と呼ばれ，n 次共正値行列の集合 C_n は n 次共正値錐（copositive cone）と呼ばれる．C_n の双対錐 C_n^* は完全正値錐（completely positive cone）と呼ばれ，以下で与えられる[2]．

$$C_n^* = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} | \text{ある } v^k \in \mathbb{R}_+^n (k=1, 2, \cdots, p) \text{ に対して } X=\sum_{k=1}^{p} v_i v_i^T\}.$$

前出の錐には以下の包含関係

$$C_n^* \subseteq D_n \subseteq S_+^n \subseteq C_n$$

があり，$n \leq 4$ の場合は $C_n^*=D_n$ が成り立つ[2]．特に，2 次割当問題を含む NP 困難な非凸 2 次混合 0-1 整数計画問題の解集合の凸包は，適当な n に対する C_n^* 上の錐線形計画問題の解集合と一致する[3]．ただし，C_n^* や C_n に対する自己整合障壁関数の存在は不明であり，また D_n を高次の半正定値錐の「切り口」として与える定式化は，問題が非常に大規模となるため現実的ではない．このため上記の錐を分割したり，凸多面錐で近似するなどして，より精度の高い解を効率よく算出するための緩和手法が提案されている．

参考文献

[1] A. Ben-Tal and A. Nemirovskii, *Lectures on Modern Convex Optimization, Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*, SIAM Publications (2001).

[2] A. Berman and N. S. Monderer, *Completely Positive Matrices*, World Scientific Publishing (2003).

[3] S. Burer, "On the copositive representation of binary and continuous nonconvex quadratic programs," *Mathematical Programming* 120 (2009), 479-495.

[4] J. Faraut and A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford University Press (1994).

[5] O. Güler, "Hyperbolic polynomials and interior point methods for convex programming," *Mathematics of Operations Research* 22 (1997), 350-377.

[6] A. S. Lewis, P. A. Parrilo and M. V. Ramana, "The Lax conjecture is true," *Proceedings of the American Mathematical Society* 133 (2005), 2495-2499.

[7] Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovski, *Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, SIAM Publications (1993).

[8] J. Renegar, *A Mathematical View of Interior Point Methods for Convex Optimization*, MPS-SIAM Series on Optimization, 2001.