

金融工学における Malliavin 解析を用いた感度計算

A. Kohatsu-Higa, 安田和弘

Malliavin 解析は 1980 年代に確率解析の分野で理論的發展を遂げてきた。その後、金融工学・数理ファイナンスの分野で応用されるようになった。本稿では P. L. Lions 等による 1999 年の論文以降広く研究されている、Malliavin 解析を用いたファイナンスにおける感度解析 (Greeks 計算) について紹介する。

キーワード：金融工学, Malliavin 解析, Greeks, リスク管理

1. はじめに

Malliavin 解析は 1978 年に発表された P. Malliavin 氏の論文 [6] に端を発し、1980 年代には確率解析の分野で広く理論研究が成されるようになった。Malliavin 解析の発展には、日本人確率論研究者が多大な貢献をしている。その後、様々な分野に応用されていた。その 1 つに金融工学、数理ファイナンスが挙げられる。金融工学の分野で特に注目されるようになったのが、1999 年に Fournié et al. によって発表された、Malliavin 解析を用いた感度計算¹ の論文 [6] である。従来、金融工学の分野で Greeks 計算は有限差分法によって計算されてきた。しかし、この方法では差分近似パラメータの選び方により計算結果が大きく異なってしまう。それに対して、Malliavin 解析を用いた方法では近似パラメータを導入する必要がないところに強みがある。

Malliavin 解析は関数解析を用いた方法など様々な導入方法がある。本稿では、金融工学の Greeks 計算で必要となる程度の Malliavin 解析を紹介するため、比較的理解しやすい Bally [1] を参考に Malliavin 解析を導入する (第 2 節)。この方法はリーマン積分の構築と同様、まず離散的に考え、その極限を考えるこ

とで Malliavin 解析を構築していく方法である。その後、金融工学における Greeks 計算へ応用していく。最後に、いくつかの数値例を紹介する (第 3 節)。

2. Malliavin 解析の紹介

金融工学では、株価などの資産価格を時間とともに連続的に変化するモデルを採用する。つまり、連続時間に対する確率過程を考える。イメージを持ってもらうためにいくつかのサンプルパスの例を図 1 で与える。この節では連続な確率過程について簡単に紹介する²。その後、Malliavin 解析について述べる。

2.1 確率解析について

連続な確率過程に対するランダム性をブラウン運動 (ウィナー過程, 正規ホワイトノイズ過程) で表す。ブラウン運動 $B(t), t \in [0, \infty)$ ³ とは、次の 4 つの性

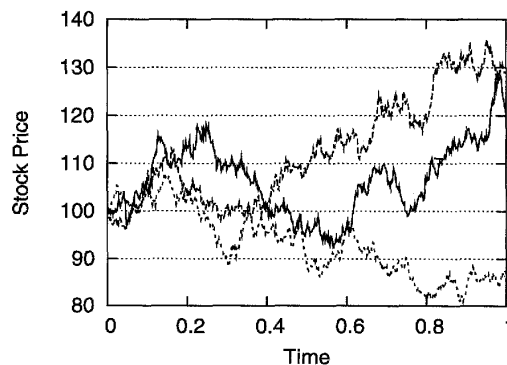


図 1 連続な確率過程の例

こはつ ひが あるとーろ

大阪大学 基礎工学研究科 & Japan Science and Technology Agency

〒560-8531 豊中市待兼山町 1-3

やすだ かずひろ

法政大学 理工学部

〒184-8584 小金井市梶野町 3-7-2

¹ 金融工学の分野では感度計算のことを “Greeks 計算” と呼ぶ。以降、Greeks 計算と書くことにする。

² 詳しくは、長井 [7] を参考にせよ。

³ t は時間を表す。

質⁴を持つ確率過程である。(1). $s < t < u < v$ とし、増分 $B(t) - B(s)$ と $B(v) - B(u)$ は互いに独立な確率変数である。(2). $s < t$ に対して、増分 $B(t) - B(s)$ は平均 0 で分散 $t - s$ の正規分布に従う。(3). $B(t)$ は時間 t に関して連続な過程である。(4). $B(0) = 0$ である。本稿では、ブラウン運動をノイズとして持つ確率過程のみを考えることにする。ブラウン運動の特徴として、連続な過程であるが、至るところ微分不可能であることがあげられる。

時刻 t での株価を $S(t)$ と書くことにする。このとき、株価を表す確率過程は通常、次のような確率微分方程式でモデル化される；

$$S(t) = S(0) + \int_0^t a(S(s)) ds + \int_0^t b(S(s)) dB(s). \quad (2.1)$$

ただし、 $S(0)$ は時刻 0 での株価、 a と b は適当な条件を満たす関数⁵ とする。ここで、(2.1) の第 2 項目は通常の積分であるが、(2.1) の第 3 項目は確率積分 (伊藤積分) と呼ばれるもので、次で定義される。時刻 t までに対して、分割 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ を考え、また $|\Pi|$ を分割の最大の幅とする。このとき、

$$\begin{aligned} & \int_0^t b(S(s)) dB(s) \\ &= \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} b(S(t_i))(B(t_{i+1}) - B(t_i)) \end{aligned}$$

と定義される⁶。この定義において被積分関数に対して、時間の左端点 t_i を取っている。このことにより、被積分関数とブラウン運動の増分が独立となり、収束を示すことができる。

次に、金融工学の分野で非常に重要なモデルである、Black-Scholes モデルを紹介する。Black-Scholes モデルは次のような確率微分方程式で株価を記述する⁷；

$$S^{BS}(t) = S^{BS}(0) + \int_0^t r S^{BS}(s) ds + \int_0^t \sigma S^{BS}(s) dB(s). \quad (2.2)$$

⁴ 正確にはさらに適合性と呼ばれる性質を持つ必要があるが、ここでは触れないことにする。

⁵ 例えば、リプシッツ連続性が挙げられる。詳しくは長井 [7] を見よ。

⁶ ここでは数学的に細かい話は避けたいため、何か収束するとだけ思っておいてもらえれば十分である。正確な収束の意味は長井 [7] を見よ。

⁷ ここではリスク中立確率でモデルを考えている。リスク中立確率については関根 [8] を参考にせよ。

⁸ 安全資産とは、国債や預金などである。

ここで、 r は安全資産⁸ の金利を表す定数、 σ はボラティリティ⁹ と呼ばれる正の定数である。このとき、(2.2) 式の解は次のように書くことができる；

$$S^{BS}(t) = S^{BS}(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right). \quad (2.3)$$

2.2 Malliavin 解析について

次に Malliavin 解析について述べる。Malliavin 解析とはブラウン運動の増分に対する解析と見ることができる。今、ブラウン運動 $B(t)$ を次のように増分の和で書いておく。 $B(t_0) = B(0) = 0$ より、

$$B(t) = \{B(t) - B(t_{n-1})\} + \{B(t_{n-1}) - B(t_{n-2})\} + \dots + \{B(t_1) - B(t_0)\}.$$

ここで、 $\Delta_i = B(t_{i+1}) - B(t_i)$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$) とする。

本稿では簡単のため 1 つのブラウン運動に依存した確率過程 $S(t)$ のみを考える¹⁰。これは例えば前述の Black-Scholes モデルの解 (2.3) 式を考えると良い。解 $S^{BS}(t)$ は 1 つのブラウン運動 $B(t)$ だけに依存している。

確率過程 $S(t)$ は次のようにブラウン運動の増分の関数のようにみなすことができる¹¹；

$$S(t) = f_n(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}).$$

例えば、(2.3) 式はブラウン運動の増分を用いて次のように書ける；

$$\begin{aligned} S^{BS}(t) &= f_n^{BS}(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}) \\ &= S^{BS}(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma(\Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_{n-1})\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

このようにブラウン運動の増分で表現した $S(t)$ に対して Malliavin 微分 $D_s S(t)$ を次のように定義する。時刻 $t_j \leq s < t_{j+1}$ に対して¹²、

$$D_s S(t) = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \frac{\partial f_n}{\partial \Delta_j}(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}).$$

つまり、時刻 s を含むブラウン運動の増分 Δ_j での偏微分を行い、時間の分割を細かくしていったものである。 $\mathbf{1}_{[u,t)}(s)$ を定義関数、つまり $u \leq s < t$ のとき値 1、それ以外のときは値 0 を取る関数とする。このとき、次のように書き直すことができる；

⁹ ボラティリティは株価の変動の激しさを表すパラメータである。

¹⁰ Bally [1] では、 d 個のブラウン運動に依存した場合が書かれている。

¹¹ f_n は n 変数を持つ微分可能な関数とする。

¹² 収束の意味は L^p -収束 ($p \geq 1$) の意味である。詳しくは Bally [1] を見よ。

$$D_s S(t) = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f_n}{\partial \Delta_i}(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}) \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(s).$$

例えば、(2.3)式に対しては次のようになる；

$$\begin{aligned} D_s S^{BS}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sigma S^{BS}(t) \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(s) \\ &= \sigma S^{BS}(t) \mathbf{1}_{[0, t]}(s). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Malliavin 微分に対するいくつかの性質を見ていく。

Malliavin 微分に対しては通常の微分のように連鎖率が成り立つ。

性質 2.1 微分可能な関数 ϕ に対して、

$$D_s \phi(S(t)) = \frac{d\phi}{dx}(S(t)) D_s S(t) \quad (2.6)$$

が成り立つ。

次に双対定理について述べる。

性質 2.2 u_t を確率過程とする。このとき、

$$E \left[\int_0^T D_s S(T) \cdot u(s) ds \right] = E[S(T) \delta(u)] \quad (2.7)$$

が成り立つ。ただし、 $\delta(u)$ は次の性質を持つものである¹³； F を確率変数、 $v(s)$ を時刻 s までのノイズのみに依存した確率過程¹⁴ とすると¹⁵、

$$\delta(Fv(\cdot)) = F \int_0^T v(s) dB(s) - \int_0^T D_s F \cdot v(s) ds. \quad (2.8)$$

ここで、第 1 項目は確率積分である。

最後に、Malliavin 解析の意味での部分積分公式について述べる。

性質 2.3 G を確率変数とし、 $\phi(x)$ を関数とする。このとき、

$$E \left[\frac{d\phi}{dx}(S(T)) \cdot G \right] = E[\phi(S(T)) H(S(T); G)] \quad (2.9)$$

を満たす $S(T)$ と G に依存した確率変数 $H(S(T); G)$ ¹⁶ が存在するとき、(Malliavin 解析の意味での) 部分積分公式が成り立つという。

注意 2.4 本節の最後にいくつかの注意を述べておく。

(i). $H(S(T); G)$ の表現は 1 つとは限らないため、表現の仕方によってシミュレーションの精度が変わってくる。ここでは一般的な表現を 1 つ与えておく；

¹³ $\delta(u)$ のことを Skorohod 積分と呼んだりする。これは確率積分を拡張したものである。詳しくは Bally[1] を見よ。

¹⁴ 適切な確率過程のことである。つまり、 $v(s)$ は時刻 s より将来のノイズ (ランダム性) には依存していないものである。

¹⁵ $v(\cdot)$ の \cdot はここに積分の変数が入ることを意味している。

¹⁶ 金融工学の分野では、この確率変数 $H(S(T); G)$ のことを Malliavin weight と呼ぶ。

$$H(S(T); G) = \frac{1}{T} \delta \left(\frac{G}{DS(T)} \right). \quad (2.10)$$

(ii). 本稿では、確率微分方程式の解が陽に分かっている場合のみを対象にしている。しかし一般論では、解が陽に書けない場合でも Malliavin 微分に対する演算は可能である¹⁷。

3. 感度解析への応用

3.1 オプション価格について

前の節で導入した Malliavin 解析を用いて金融工学における感度解析について述べる。

本節ではまず、感度計算の対象となるオプション¹⁸ について紹介する。オプションとは、保険の一種と考えてもらうと理解しやすいと思われる。例えば、「1 年後に A 社の株を 100 円で買う権利」が簡単な例である。A 社の株が 1 年後に 110 円になった場合は 10 円の利益となり、逆に A 社の株が 1 年後に 90 円になった場合は権利を放棄する。このような金融商品の売り手は金融機関である。金融機関はリスクを肩代わりした代わりに妥当なお金をもらわなくては行けない。これをオプションの価格付けという。また売ったことで得られるお金を基に、リスク回避手法を構築しなくてはならない。ここで感度解析 (Greeks 計算) が必要となる。余談ではあるが、金融機関でこのような仕事をしている人をクオンツ¹⁹ と呼んでいる。

オプションを作るためにいくつか決めなければならないことがある。まず、(i). 満期 T (年) を決めなくては行けない。上記の例では $T=1$ 年である。(ii). 次に、行使価格 K (円) を決める必要がある。上記の例では $K=100$ 円である。(iii). さらに、オプションの型を決める必要がある。代表的な例を以下に与える。(a). ヨーロッパ型²⁰ とは、満期の株価と行使価格を比較し、満期でのみ権利を行使することができる。上記の例がそれにあたる。つまり、満期での株価が行使価格の 100 円を超えているかどうかで比較をする。満期で 100 円を超えていたら権利を行使し、超えていなければ権利を放棄する。(b). アメリカ型とは、期間中いつでも権利を行使でき、行使したときの株価と行使価

¹⁷ Hypoelliptic などの仮定が必要となる。そのとき $D \cdot S(t) \neq 0$ となる。詳しくは Bally[1] を見よ。

¹⁸ テリバティブや金融派生商品とも呼ばれる。

¹⁹ 日本では理系修士卒がクオンツになる場合が多い。海外では多くが博士卒である。

²⁰ オプションの型で地名がよく使われるが、オプションの内容とは特に関係がない。

格で比較をする。(c).アジア型とは、期間中の平均株価と行使価格を比較し、満期でのみ権利を行使することができる。(d).ルックバック型とは、期間中のある条件の株価と行使価格で比較をし、満期でのみ権利を行使することができる。現在では、上記のものを組み合わせたとような、さらに複雑な商品が多く存在する。(iv).最後に、ペイオフ関数 $\phi_K(x)$ を決定する必要がある。この関数によって、権利を行使したときにもらえる金額が決まる。 $\phi_K(x)$ は行使価格 K に依存している関数である。多くの場合、微分可能でない関数が用いられることに注意しておく。以下に、代表的な4つのペイオフ関数とそのグラフ²¹を、行使価格 $K=100$ の場合で与える。(a).図2はコール型と呼ばれ $\phi_K(x) = (x-K)^+ \equiv \max(x-K, 0)$ である。ヨーロッパ型の場合は、「満期での株価 $S(T)$ が行使価格 K を上回った分をもらえる」²²ことを意味する。上記の例はこれにあたる。(b).図3はプット型と呼ばれ $\phi_K(x) = (K-x)^+ \equiv \max(K-x, 0)$ である。ヨーロッパ型の場合は、「満期での株価 $S(T)$ が行使価格 K を下回った分をもらえる」ことを意味する。(c).図4はデジタルコール型と呼ばれ $\phi_K(x) = \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x-K)$ である。ヨーロッパ型の場合は、「満期での株価 $S(T)$ が行使価格 K を上回った場合1円²³もらえる」ことを意味する。(d).図5はデジタルプット型と呼ばれ $\phi_K(x) = \mathbf{1}_{[0, \infty)}(K$

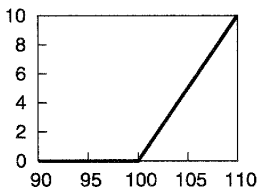


図2 コール型

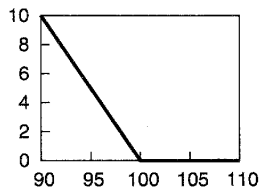


図3 プット型

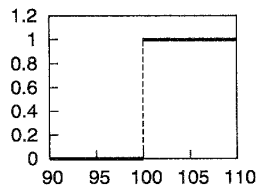


図4 デジタルコール型

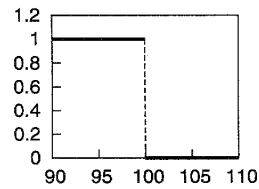


図5 デジタルプット型

²¹ グラフの横軸は満期での株価、縦軸は支払われる金額(ペイオフ)である。

²² 何度か述べているように $S(T)$ が K を下回った場合は権利を放棄することになる。

²³ ここでは1円としているが、実際は適当な定数 α をかけて α 円もらえるようにする。簡単のために $\alpha=1$ としている。

$-x)$ である。ヨーロッパ型の場合は、「満期での株価 $S(T)$ が行使価格 K を下回った場合1円もらえる」ことを意味する。

3.2 グリークスについて

各オプション価格の価格式は、後の節で与える。ここでは、金融工学における感度解析 (Greeks 計算) について述べる。オプションの価格は、初期株価 $S(0)$ 、ボラティリティ σ 、安全資産の金利 r 、残存期間 T などのパラメータに依存している。したがって、これらのパラメータが変化したときの価格の変化量(感度)をとらえておくのが金融機関でのリスク管理上、重要である。金融機関では、これらのリスク量をシミュレーションして、算出している。このリスク量のことをグリークス (Greeks) と呼んでいる。このとき、金融機関では大量のオプションを有しているため、効率的なシミュレーション方法の構築が必要となってくる。その1つの方法が今回紹介する Malliavin 解析を用いた計算方法である。

ここで、グリークスの紹介をしておく。(i).初期株価 $S(0)$ に対するオプション価格の変化量をデルタと呼ぶ。後の例ではデルタを中心に与える。(ii).ボラティリティ σ に対するオプション価格の変化量をベガと呼ぶ。(iii).金利 r に対するオプション価格の変化量をローと呼ぶ。(iv).残存期間 T に対するオプション価格の変化量をシータと呼ぶ。以上のギリシャ文字を総称して、このような感度計算を Greeks 計算と呼んでいる。

3.3 ヨーロッパ型のオプションの場合

ヨーロッパ型のオプション価格は次のように与えられる²⁴;

$$P = E[e^{-rT} \phi_K(S(T))]. \quad (3.1)$$

ここで、 e^{-rT} は $\phi_K(S(T))$ を現在価値に直す連続複利の割引係数である²⁵。

(3.1)式に対して、Greeks 計算を行う。調べたいパラメータを β とする²⁶。このとき、このパラメータに対する感度は次のように与えられる;

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} E[e^{-rT} \phi_K(S(T))]. \quad (3.2)$$

Malliavin 解析を用いて表現を変形していく。まず

²⁴ 正確には期待値はリスク中立確率の下での期待値である。

²⁵ $\phi_K(S(T))$ は時刻 T でのお金の価値であるため、それを現在の価値に直すには安全資産の連続複利 e^{rT} で割ってやる必要がある。

²⁶ $\beta = S(0), \sigma, r, T$ などである。

(形式的に²⁷⁾ 次のように合成関数の微分をする；

$$(3.2) = e^{-rt} E \left[\frac{\partial \phi_K}{\partial x}(S(T)) \cdot \frac{\partial S(T)}{\partial \beta} \right]. \quad (3.3)$$

(2.9)式の $G = \frac{\partial S(T)}{\partial \beta}$ と考えて、Malliavin 解析の意味での部分積分公式を用いると、

$$(3.3) = e^{-rt} E \left[\phi_K(S(T)) H \left(S(T); \frac{\partial S(T)}{\partial \beta} \right) \right] \quad (3.4)$$

となる。

残るは(3.4)式の $H \left(S(T); \frac{\partial S(T)}{\partial \beta} \right)$ を計算しなくてはならない。以下では、株価 $S(t)$ に対して、Black-Scholes モデル(2.2)式を仮定して計算を進める。このとき、 $S^{BS}(t)$ の解は (2.3)式で与えられる。ここではデルタ ($\beta = S^{BS}(0)$) の場合のみを扱う²⁸。
 $\frac{\partial S^{BS}(T)}{\partial S^{BS}(0)} = \frac{S^{BS}(T)}{S^{BS}(0)}$ に注意する。(2.10)と(2.5)、(2.8)式より²⁹、

$$H \left(S^{BS}(T); \frac{S^{BS}(T)}{S^{BS}(0)} \right) = \frac{1}{T} \delta \left(\frac{S^{BS}(T)}{S^{BS}(0)}; \sigma S^{BS}(T) \mathbf{1}_{[0, T]}(\cdot) \right) = \frac{B(T)}{\sigma T S^{BS}(0)}.$$

したがって、Black-Scholes モデルを仮定したときのヨーロッパ型オプションのデルタは次のように書くことができる³⁰；

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S^{BS}(0)} = e^{-rt} E \left[\phi_K(S^{BS}(T)) \frac{B(T)}{\sigma T S^{BS}(0)} \right]. \quad (3.5)$$

ここでは、デジタルコール型のペイオフ関数を持つ、ヨーロッパ型デジタルコールオプションのデルタについて考える。その式は次のようになる；

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{DC}}{\partial S^{BS}(0)} = \frac{\partial}{\partial S^{BS}(0)} E \left[e^{-rt} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(S^{BS}(T) - K) \right]. \quad (3.6)$$

(3.5)式で $\phi_K(x) = \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x - K)$ と考えると、

$$(3.6) = e^{-rt} E \left[\mathbf{1}_{[0, \infty)}(S^{BS}(T) - K) \frac{B(T)}{\sigma T S^{BS}(0)} \right].$$

²⁷ 前に述べたように ϕ_K は微分可能な関数とは限らない。しかし、ここでは特に気にしないで計算を進めていく。

²⁸ ベガなどの計算も同様に行うことができる。詳しくは Kohatsu-Higa, Montero [4] を参照せよ。

²⁹ (2.8)式で $F \equiv 1$ (定数), $v(s) \equiv \frac{1}{\sigma T S^{BS}(0)}$ (定数) と考える。このとき、 $D_s F \equiv 0$ と $\int_0^T dB(s) = B(T) - B(0) = B(T)$ に注意しておく。

³⁰ ペイオフ関数 $\phi_K(x)$ の形状に関係なくこの表現を持つことに注意せよ。

Malliavin 解析を用いた方法と有限差分法を用いた方法の比較をする。シミュレーション方法と有限差分法については補遺で述べる。

この設定では陽な形でデルタを与えることができる。 $S^{BS}(T)$ の解が(2.3)式で与えられ、 $B(T)$ は平均 0、分散 T の正規分布に従うから、オプションの価格式の期待値を具体的に計算することができる；

$$\mathcal{P}^{DC} = e^{-rt} \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{\log \frac{K}{S^{BS}(0)} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right\}.$$

ただし、 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ とする。したがって、直接 $S^{BS}(0)$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{DC}}{\partial S^{BS}(0)} = \frac{e^{-rt}}{\sigma S^{BS}(0) \sqrt{2\pi T}} \exp \left(-\frac{\left(\log \frac{K}{S^{BS}(0)} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right)^2}{2\sigma^2 T} \right).$$

このシミュレーション結果を与える (図 6)。ここでは、 $S^{BS}(0) = 100$, $K = 100$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$ として計算した。横軸にモンテカルロ法 (m) を 10,000 回から 1,000,000 回まで 10,000 回刻みでシミュレーションし、縦軸の y_1 軸にデルタの値、 y_2 軸に標準誤差を与えた。Malliavin 解析を用いた方法は早くから誤差 1% 以内に収まっているが、有限差分法を用いた方法は 1,000,000 回近くになっても外れていることがある。標準誤差は大きく異なっている。

3.4 アジア型のオプションの場合

アジア型のオプション価格は次のように与えられる；

$$\mathcal{P} = E \left[e^{-rt} \phi_K \left(\frac{1}{T} \int_0^T S(u) du \right) \right]. \quad (3.7)$$

このとき、株価に Black-Scholes モデルを仮定した

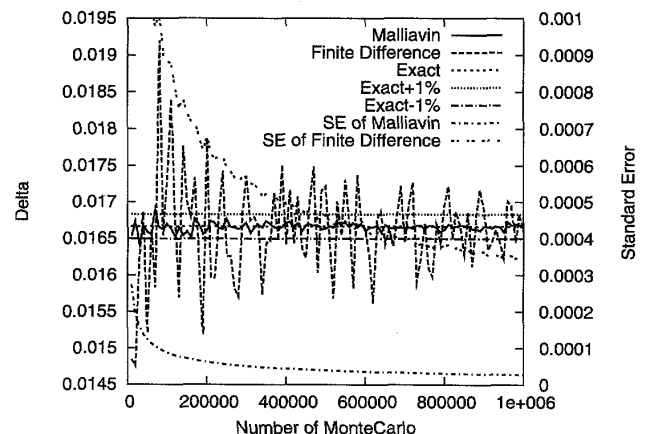


図 6 ヨーロッパ型デジタルコールオプションのデルタ

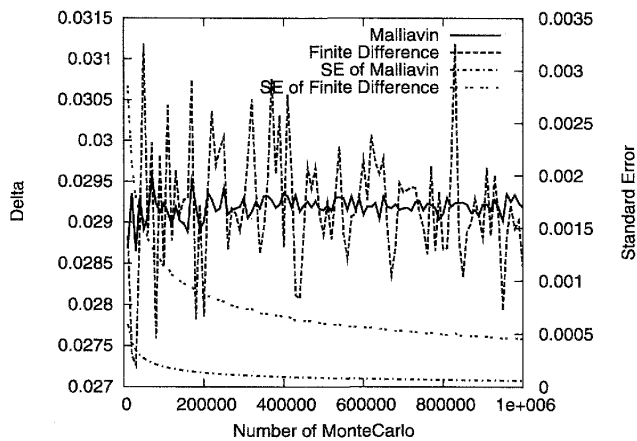


図7 アジア型デジタルコールオプションのデルタ

ときのアジア型オプションのデルタは次のように計算

される。 $\bar{S}_T^{BS} = \frac{1}{T} \int_0^T S^{BS}(u) du$ と置くと、

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S^{BS}(0)} = \frac{2e^{-rT}}{S^{BS}(0)\sigma^2} E \left[\phi_k(\bar{S}_T^{BS}) \left(\frac{S(T) - S(0)}{TS_T^{BS}} - r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \quad (3.8)$$

と書ける³¹。ここでも、ペイオフ関数としてデジタル・コール型を用いて数値例を与える(図7)。パラメータは前節と同様のものを用いることとする。アジア型では、真値を知ることができない。しかし、Malliavin 解析を用いた方が早くから値が安定していることが分かる。

4. まとめと展望

Malliavin 解析を用いた感度解析 (Greeks 計算) は、有限差分法のような近似パラメータを導入する必要がない。そのため、計算結果がパラメータの値に依存しないで得られる。また、シミュレーション結果からも安定性が確認される。

本稿では1階微分に対する Greeks 計算のみを紹介したが、より高次の微分に対する Greeks 計算も Malliavin 解析を用いて行うことができる。また近年では、多資産からなるオプションに対する Greeks 計算や、Lookback オプションと呼ばれるオプションの Greeks 計算、資産価格過程に跳びを含むようなより一般の確率過程に対して研究が成されている。

参考文献

[1] V. Bally, *Introduction to Malliavin Calculus*, Lecture Note, 2007. <http://perso-math.univmlv.fr/users/bally>.

³¹ 導出は Kohatsu-Higa, Montero[4]を参照せよ。

vlad/publications.html

- [2] E. Fournié, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions and N. Touzi, *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance*, Finance Stochastic, Vol. 3, no. 4, 391-412, 1999.
- [3] P. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, 1992.
- [4] A. Kohatsu-Higa and M. Montero, *Malliavin Calculus in Finance*, Handbook of computational and numerical methods in finance, edited by S. T. Rachev, 111-174, 2004.
- [5] A. Kohatsu-Higa, 田中章博, 楠岡近似の紹介, 数学, to appear.
- [6] P. Malliavin, *Stochastic calculus of variation and hypo-elliptic operators*, Proceedings of Intern. Symp. SDE, Kyoto, 1976, edited by K. Itô, Kinokuniya, 1978.
- [7] 長井英生, 確率微分方程式, 共立出版, 1999.
- [8] 関根順, 数理ファイナンス, 培風館, 2007.

A. 補遺

A.1 シミュレーション方法について

この節では、(2.1)式のように書かれた確率過程 $S(t)$ に対して、 $E[g(S(T), B(T))]$ で表される期待値をシミュレーションする方法について述べる。ここで、 g は2変数の関数とする。この期待値をシミュレーションするには2つの近似を考えなくてはならない。1つ目は確率過程 $S(T)$ と $B(T)$ の近似と、2つ目が期待値の近似である³²。

まず、1つ目の確率微分方程式に対する近似を述べる。一般的に良く知られた簡単な近似方法は Euler-丸山近似と呼ばれる方法である³³。時刻 T までを n 個に等分割 $t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n} \equiv \Delta t$ した分割を考える。初期値は $S^{EM}(t_0) = S(0)$ とし、次のような漸化式で近似する；

$$S^{EM}(t_{i+1}) = S^{EM}(t_i) + a(S^{EM}(t_i))\Delta t + b(S^{EM}(t_i))\sqrt{\Delta t}N_i.$$

ただし、 N_i は独立な標準正規分布に従う確率変数列である。ここで確率積分が左端点で定義されていたことが重要になる。 $S^{EM}(t_n)$ が $S(T)$ の近似値となる。

³² このような確率過程に対する近似や性質については Kloeden, Platen[3]を参照すると良い。

³³ 最近では、楠岡近似と呼ばれる精度の高い近似方法も知られている。詳しくは、Kohatsu-Higa, 田中[5]を参照せよ。

また、 $B(T) = \sqrt{\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} N_i$ である。

次に期待値の近似について述べる。期待値の近似には大数の法則（モンテカルロ法）を用いる。つまり、 $S(T)$ 、 $B(T)$ を多数シミュレーションし、その標本平均を計算する；

$$E[g(S(T), B(T))] \approx \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m g(S_j(T), B_j(T)).$$

ただし、 m をサンプルの数とし、 $S_j(T)$ 、 $B_j(T)$ 、 $j = 1, \dots, m$ はそれぞれ $S(T)$ 、 $B(T)$ の独立同分布な標本である。ここでは、Euler-丸山近似でシミュレーションした結果を用いる。また、 m と n の関係は $m = O(\Delta t^{-2})$ とする。ただし、 O はランダウ記号である。

A.2 有限差分法について

この節では有限差分法について述べる。有限差分法とは、正の定数 $h > 0$ に対して微分を

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \beta} E[f(S^\beta(T))] \\ & \approx \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{f(S_j^{\beta+h}(T)) - f(S_j^{\beta-h}(T))}{2h} \end{aligned}$$

と近似するものである³⁴。ただし、 $S_j^\beta(T)$ は $S_j(T)$ が依存しているパラメータ β を明確にするために右肩に β を書いた。この近似方法は近似パラメータ h の選び方によってシミュレーション結果が変わってくる。 $f(x) = \mathbf{1}(x \geq K)$ のときは、 $h = O(m^{-\frac{1}{5}})$ と選ぶのが良いという結果が知られている。

³⁴ ここで紹介したものは中心差分法と呼ばれるもので、代表的なものでは最も安定した結果が得られるものである。