巡回トーナメント問題の近似解法

山口　大輔
(中央大学理工学部情報工学科　現所属・同大学院理工学研究科情報工学専攻)
指導教員　松井知己 教授

1. はじめに

本稿では，巡回トーナメント問題の近似解法を提案する．巡回トーナメント問題は，Easton, Nemhauser and Trick[2]によって提唱された，スポーツスケジューリングのベンチマーク問題の1つで，各チームが本拠地を持つ形式の2重総当り戦に対し，総移動距離が最小となるスケジュールを求める問題である．

提案解法は，与えられた整数定数 k について，どのチームも $k+1$ 連続以上のホームゲームやアウェイゲームを行わないという制約の課された問題を対象とし，$k \geq 3$ の場合で適用できる．定数 $k \geq 4$ のとき，提案解法は定数近似比率を持つ，初の解法となっている．

2. 巡回トーナメント問題

チームの数を n で表す．n は正の偶数とする．試合の開催日時をスロットと呼ぶ．各チームは，毎スロットで1回ずつ試合を行うとする．また，各チームは相異なる本拠地を持ち，試合は対戦する2チームの，一方の本拠地で開催されるとする．各チームが，他の $n-1$ チームと1回ずつ対戦する形式を（1重）総当り戦と呼ぶ．すべてのチーム対が互いの本拠地で1度ずつ，計2回対戦する形式を2重総当り戦という．

本節ではチームの集合を $V=\{0,1,\ldots,n-1\}$ と表す．また，スロットの集合は S で表す．各チームについて，自身の本拠地で行う試合をホームゲーム，対戦相手の本拠地での試合をアウェイゲームという．

本拠地間の移動距離は，行と列が共に V でインデックスされた距離行列 D で与えられる．行列 D の各要素 $d_{ij} \geq 0$ は，2チーム $i, j \in V$ の本拠地間の距離を表す．本稿では $d_{ii}=0$, $d_{ij}=d_{ji}$（対称性），および $d_{ij} \leq d_{ik}+d_{kj}$（三角不等式）が，任意の3チーム $i, j, k \in V$ に対して成り立っていると仮定する．

さらに各チームに対して，リーグ戦の開始前と終了後に，ホームに居ることと，連続してアウェイゲームを行うとき，開催地の間を直接（ホームに戻らず）移動することを仮定する．

整数定数 k が与えられたとき，巡回トーナメント問題は，次のように定義される．

<u>巡回トーナメント問題（**TTP**(k)）[2]</u>
入力：チームの集合 V と本拠地間の距離行列 D.
出力：次の2つの制約
atmost：ホームゲーム（アウェイゲーム）が $k+1$ 回以上連続しない，
no-repeater：同じ対戦相手との試合が連続しない，
を満たす2重総当り戦のうち，総移動距離が最小となるものののスケジュール．

3. 近似解法の提案

（仮想）チームの集合を $T=\{0,1,\ldots,n-1\}$ とする．総当りスケジュール K のスロット $s \in S$ における，チーム $t \in T$ の対戦相手を $K(t,s)$ と表す．

以下ではまず，**カークマンスケジュール**と呼ばれる，古典的なスケジュールについて述べる．カークマンスケジュール K^* は，チーム $t \in T \setminus \{n-1\}$ について

$$K^*(t,s)=\begin{cases} s-t \bmod n-1 & (s-t \neq t \bmod n-1), \\ n-1 & (s-t=t \bmod n-1), \end{cases}$$

チーム $n-1$ について

$$K^*(t,s)=\begin{cases} s/2 & (t=n-1, s：偶数), \\ (s+n-1)/2 & (t=n-1, s：奇数), \end{cases}$$

と定義される．上記の定義では，ホーム，アウェイの割当が定まっていないことに注意されたい．

次に，カークマンスケジュールへのホーム，アウェイの割当法を提案する．まず関数 $f: U \rightarrow \{\mathrm{H}, \mathrm{A}\}$ を導入する．集合 U は，$U=\{i \in \mathbb{Z} \mid i \neq 0 \bmod n-1\}$ である．以下では，'¬H' は 'A' を，'¬A' は 'H' を表すとする．関数 f が次の2つの条件 (F1) $\forall i, \forall j \in U$ について，$i=j \bmod n-1$ ならば $f(i)=f(j)$, (F2) $\forall i \in U$ について，$f(i)=\neg f(-i)$ を満たすとき，**ホームアウェイ割当可能な関数**と呼ぶ．定義より，ホームアウェイ割当可能な関数 f が，列 $(f(1), f(2), \ldots, f(n/2-1))$ で一意に定まるのは明らかである．

また，**ルートチーム列** $(r_0, r_1, \ldots, r_{n-2}) \in \{\mathrm{H}, \mathrm{A}\}^{|S|}$ を次のように構成する．まず

$$r_i = \begin{cases} \mathrm{H} & (i \in \{0, 1, \ldots, k-1\} \bmod 2k), \\ \mathrm{A} & (i \in \{k, k+1, \ldots, 2k-1\} \bmod 2k), \end{cases}$$

とし，得られた列の末尾の2要素 r_{n-3}, r_{n-2} が等しくなるよう，必要ならば r_{n-3} を置き換える．

上記のホームアウェイ割当可能な関数 f とルートチーム列を用いて，カークマンスケジュール K^* に次の通りホーム，アウェイを割り当てる．任意のスロット $s \in S$ での試合は，チーム $t \in T \backslash \{n-1\}$ にとって

$$\begin{cases} f(s-2t)\text{-ゲーム} & (s-2t \neq 0 \bmod n-1), \\ \quad \neg r_s\text{-ゲーム} & (s-2t = 0 \bmod n-1), \end{cases}$$

またチーム $n-1$ にとって r_s-ゲームとする（ただし，Hはホーム，Aはアウェイに対応する）．

以下では，k 通りのホームアウェイ割当可能な関数 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ を具体的に定める．$\forall \alpha \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，列 $(f_\alpha(1), f_\alpha(2), \ldots, f_\alpha(n/2-1))$ を定めることで，関数 f_α を決定する．まず，k 連続の 'A' と k 連続の 'H' が交互に並んだ無限列を考える．続いてそこから，先頭の $k-\alpha+1$ 要素が $(\overbrace{\mathrm{A}, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}}^{k-\alpha}, \mathrm{H})$ となる，長さ $n/2-1$ の部分列を抜き出す．最後に，先頭の2要素を 'A' とし，最後から2つ目の要素を，末尾の要素と同じになるよう，必要ならば置き換える．$k=3$ の場合，さらに先頭から3，4番目の要素を 'H' とする．

これ以降の本節では，任意の $\alpha \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対し，上記の方法でホーム，アウェイが割り当てられたカークマンスケジュールを X_α と表す．

以下では，2重総当りスケジュールの構成法を記述する．はじめに，上記で定義した X_α の先頭と末尾のスロットを交換し，得られる総当りスケジュールを Y_α と表す．続いて，スケジュール Y_α のホームとアウェイを入れ替えて得られる1重総当りスケジュールを，Y_α の後に連結して，2重総当りスケジュールを構成する（この手続きはミラーリングと呼ばれる）．こうして得られた2重総当りスケジュールを Z_α で表す．

定理1　任意の $\alpha \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して，2重総当りスケジュール Z_α はatmost制約およびno-repeater制約を満たす．

最後に，2重総当りスケジュール Z_α に対するチームの割当アルゴリズムを記述し，近似解法の提案を行う．これ以降の本稿において，V を本拠地の集合とする．また，本拠地 $v \in V$ をホームとする実在のチームを，混乱の無い限り v で表し，チーム $t \in T$ を，本拠地の割当を伴わない**仮想チーム**と見なす．

はじめに $\alpha \in \{1, 2, \ldots, k\}$ を無作為に選び，仮想チームについて，2重総当りスケジュール Z_α を構成する．続いて，頂点集合を本拠地の集合 V とし，距離行列 D で辺の長さを定めた完全無向グラフ上のハミルトン閉路を，巡回セールスマン問題の近似解法の1つであるChristofidesのアルゴリズム[1]で求める．このハミルトン閉路を H_{C} と記し，点列 $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ で表す．最後に $\beta \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ を無作為に選び，全単射 π: $T \to V$ を $\pi(i) = v_j, j = i + \beta \bmod n$ と定め，スケジュール Z_α に実在のチームを割り当てる．

提案解法の近似比率は，以下の通りである（紙幅の都合により，詳細は省く）．

定理2　定数 $k \leq 5$ のとき，提案アルゴリズムの近似比率は $(2k-1)/k + \mathrm{O}(k/n)$ である．また $k>5$ のとき，近似比率は $(5k-7)/(2k) + \mathrm{O}(k/n)$ である．

4．おわりに

本研究では，巡回トーナメント問題に対して，定数近似比率を持つ近似解法の提案を行った．

(1) 定数 $k \geq 3$ の場合に対して，新しい近似解法を提案した．$k \geq 4$ の場合について，提案アルゴリズムは定数近似比率を持つ，初の近似解法である．

(2) 提案アルゴリズムの近似比率は，$k \leq 5$ のとき $(2k-1)/k + \mathrm{O}(k/n)$ である．また $k>5$ のとき，近似比率は $(5k-7)/(2k) + \mathrm{O}(k/n)$ である．任意の k で，近似比率の定数項は2.5以下となっている．

$k=3$ の場合，既存手法[3]の近似比率が $2+\mathrm{O}(1/n)$ なのに対し，提案解法の近似比率は $5/3+\mathrm{O}(1/n)$ であり，近似精度の向上を達成できた．

参考文献

[1] N. Christofides, "Worst-case Analysis of a New Heuristic for the Travelling Salesman Problem," Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, 1976.

[2] K. Easton, G. Nemhauser and M. Trick, "The Traveling Tournament Problem: Description and Benchmarks," *Lecture Notes in Computer Science*, 2239, Springer, 580-585, 2001.

[3] R. Miyashiro, T. Matsui and S. Imahori, "An Approximation Algorithm for the Traveling Tournament Problem," *PATAT*, Universite de Montreal, 2008.