代数的対称性による行列の同時ブロック対角化法

前原　貴憲
(東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻　現所属・同大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻)
指導教員　室田一雄 教授

1. はじめに

本論文では行列の同時ブロック対角化に関する2つの問題を扱っている．

(1) **正方行列の同時ブロック対角化問題**

1つ目の問題は，実正方行列 $A_1, \cdots, A_N$ が与えられたとき，これらを同時ブロック対角化する直交行列，すなわち $P^\top A_1 P, \cdots, P^\top A_N P$ が同じ形のブロック対角行列となるような直交行列 P を求めるものである(図1)．

これは半正定値計画問題（SDP）の分野で近年盛んに研究されている問題であり，与えられたSDPの係数行列を同時ブロック対角化することにより，元のSDPを小さなサイズのSDPへと変形することができる．

Gatermann-Parrilo[1]は置換対称性・回転対称性などの代数的対称性を持つSDPに対し，係数行列を同時ブロック対角化する手法を提案した．しかし，その手法を適用するためには，問題の持つ対称性があらかじめ陽にわかっている必要があった．そこで室田ら[3]は与えられたSDPの係数行列の数値的な情報のみを用いることでそれらの分解を求める数値的なアルゴリズムを提案した．しかし，そこでは入力の行列にある代数的な条件が仮定されており，どのような入力に対しても最も細かな分解が求まるわけではなかった．図2はそのような対称性を持つ構造物の例である．

本論文では文献[3]の手法を拡張し，どのような行列が与えられた場合でも，その最も細かな分解を求めるアルゴリズムを提案した．また，文献[3]のアルゴリズムでは分解対象の行列はすべて対称行列に制限されていたが，本研究では一般の行列に対して動作するようにし，SDP以外の分野への応用も可能とした．

(2) **長方行列の同時ブロック対角化問題**

2つ目の問題は，実長方行列 $A_1, \cdots, A_N$ が与えられたとき，これらを同時ブロック対角化する2つの直交行列，すなわち，$P^\top A_1 Q, \cdots, P^\top A_N Q$ が同じ形のブロック対角行列となるような直交行列 P, Q を求めるものである（図3)．

この問題は1つ目の問題の長方行列への拡張であり，同時に，応用上重要な行列の分解である特異値分解の複数の行列への拡張と見ることができる．

本論文では最も細かな長方行列の同時ブロック対角化を同時特異値分解と名づけ，それが本質的に一意に存在することと，その構造を記述する定理を証明した．また，構造定理をもとにして，与えられた長方行列からその同時特異値分解を計算するアルゴリズムを提案した．このアルゴリズムでは，正方行列の同時ブロック対角化アルゴリズムをサブルーチンとして用いる．この新しい種類の分解は，最適化やデータ解析などへの応用が期待できるものである．

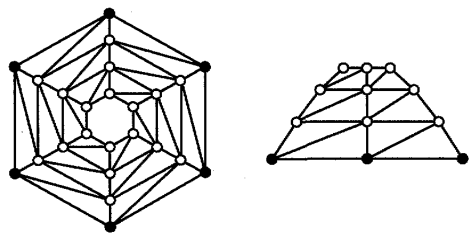
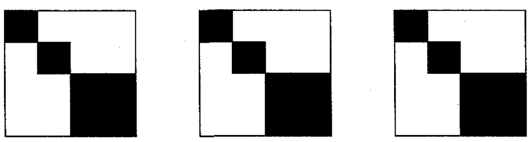
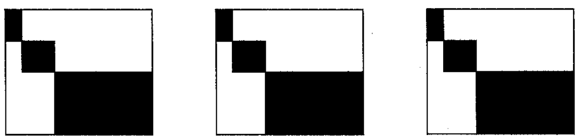


図2　Schwedler ドーム



$P^\top A_1 P$　　$P^\top A_2 P$　　$P^\top A_3 P$

図1　正方行列の同時ブロック対角化



$P^\top A_1 Q$　　$P^\top A_2 Q$　　$P^\top A_3 Q$

図3　長方行列の同時ブロック対角化

2. 正方行列の同時ブロック対角化法

正方行列の同時ブロック対角化を求めるため，本論文では行列＊代数と呼ばれる代数的構造に着目する．行列＊代数は正方行列の同時ブロック対角化問題と相性のよい代数構造で，正方行列 $A_1, \cdots, A_N$ の同時ブロック対角化とこれらが生成する行列＊代数に含まれるすべての行列の同時ブロック対角化が一対一に対応するという性質がある．さらに行列＊代数については，それが含むすべての行列の最も細かな同時ブロック対角化の構造を記述する「行列＊代数の構造定理」と呼ばれる基本的な定理が知られている（文献[2]参照）．その定理によれば，任意の行列＊代数は単純成分と呼ばれる小さな対角ブロックへと分解され，各単純成分は既約成分と呼ばれるより細かな対角ブロックへと分解される．そして，既約成分の構造は3種類（実型，複素型，四元型）のいずれかとなる．また，この分解はもとの行列＊代数から一意に定まる．

室田ら[3]はこの定理に基づき，与えられた対称行列を分解するアルゴリズムを提案したが，そこでは，すべての既約成分が実型であることを仮定していた．本論文ではそのアルゴリズムをベースにし，残りの2つの型に対するアルゴリズムを与え，さらに分解対象の行列を対称とは限らない場合へと拡張した．全体の手続きの概要を以下に示す：

アルゴリズム 1（正方行列の同時ブロック対角化）．

Step 1：与えられた行列が生成する行列＊代数の単純成分分解を求める．

Step 2.1：各単純成分について，対応する既約成分の型を判定する．

Step 2.2：各単純成分の既約成分分解を，判定した型に応じた手続きで求める．

各ステップは行列＊代数からランダムに行列を取り，さまざまな固有値分解を使い分けることで実行できる．特に Step 2.2 では判定された型に応じて，実型ならば対称行列の対角化，複素型ならば実 Schur 分解，四元型ならば実 Schur 分解と歪 Hamiltonian Schur 分解をそれぞれ利用する．

3. 長方行列の同時ブロック対角化法

長方行列の同時ブロック対角化に関しても，正方行列の場合と同じようにそれらが生成する代数構造を考え，その構造定理をもとにアルゴリズムを設計する．

本論文では与えられた長方行列 $A_1, \cdots, A_N$ に対し，これらが生成する行列＊代数上の双加群と呼ばれる代数構造を導入した．正方行列の場合の行列＊代数と同様に，行列＊代数上の双加群は長方行列の同時ブロック対角化問題と相性がよく，$A_1, \cdots, A_N$ の同時ブロック対角化とこれらが生成する行列＊代数上の双加群に含まれるすべての行列の同時ブロック対角化が一対一に対応するという性質がある．

本論文では行列＊代数上の双加群について，最も細かな分解（同時特異値分解）が本質的に一意に存在することと，その構造を記述する定理を証明した．これは正方行列の分解の際に用いた行列＊代数の構造定理と同じ形の定理で，単純成分分解，既約成分分解という階層的な分解ができることと，既約成分の特徴づけ（実型，複素型，四元型の3種類への分類）からなる．さらに，双加群の分解の構造が，双加群に付随する2つの行列＊代数の分解の構造から定まることを主張しており，行列 A の特異値分解が $AA^{\top}$ や $A^{\top}A$ の固有値分解から得られることの，複数の行列に対する拡張にもなっている．

本論文では，証明した構造定理をもとにして，与えられた長方行列からその同時特異値分解を計算するアルゴリズムを提案した．全体の手続きの概要は以下のように述べられる：

アルゴリズム 2（同時特異値分解）．

Step 1：与えられた行列が生成する双加群を考え，付随する2つの行列＊代数を作る．

Step 2：2つの行列＊代数をそれぞれ同時ブロック対角化する．

Step 3：Step 2の結果を利用して双加群の同時ブロック対角化を求める．

Step 2では本論文で提案した正方行列の同時ブロック対角化アルゴリズムが利用できる．また，Step 3の具体的な手続きは，構造定理の証明から得られる．

参考文献

[1] K. Gatermann and P. A. Parrilo : Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares, *J. Pure Appl. Alg.*, 192, pp. 95-128, 2004.

[2] M. Kojima, S. Kojima and S. Hara : Linear algebra for semidefinite programming, Res. Rep. B-290, Tokyo Inst. Tech., 1994.

[3] K. Murota, Y. Kanno, M. Kojima and S. Kojima : A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix ＊-algebras, METR 2007-52, Univ. Tokyo, 2007.