# Semidefinite programming reformulation for a class of robust optimization problems and its application to robust Nash equilibrium problems

西村　亮一

(京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻　現所属・新日本製鐵㈱)

指導教員　林　俊介 助教・福島雅夫 教授

## 1. はじめに

ロバスト最適化とは，情報に不確実性を持つ数理計画問題を取り扱うための最適化手法の一つである．近年，理論的な研究だけでなく，金融工学，生産計画などへ数多くの応用研究がなされており，大きな注目を集めている．特に，ロバスト最適化の考え方を効果的に適用するためには，半正定値計画問題（SDP: SemiDefinite Program）などの効率的なアルゴリズムが存在するクラスの問題へ再定式化することが重要となる．Ben-Tal と Nemirovski[2]は，不確実性集合が楕円体で表される線形計画問題が，SDP に再定式化できることを示した．しかし，二次錐計画問題（SOCP: Second-Order Cone Program）において不確実集合が楕円体によって表せる場合，SDP に再定式化できるかどうかは，特殊な場合を除き，長い間未解決問題であった[2]．

本研究では，まず，非凸二次計画問題に対する強双対性[1]を用いて，ある構造をもつロバスト線形計画問題を SDP へ再定式化する．次に，この再定式化手法を用いて，不確実性集合が楕円体で与えられるようなロバスト SOCP を SDP として再定式化する．さらに，同様の手法をゲーム理論におけるロバスト Nash 均衡問題[3]に適用し，各プレイヤーのコスト関数と相手の戦略の両方に不確実性が存在する場合でも，半正定値錐相補性問題（SDCP: SemiDefinite Complementarity Problem）として再定式化できることを示す．最後に数値実験で，得られた SDP や SDCP が効率的に解けることを示し，それらの問題の数値的な性質を調べる．

## 2. ロバスト線形計画の SDP への再定式化

本節では，目的関数が $(\hat{\gamma}^0)^\top(\hat{A}^0x+\hat{b}^0)$，制約式が $x\in\Omega$ かつ $(\hat{\gamma}^i)^\top(\hat{A}^ix+\hat{b}^i)\le 0\ (i\in\mathcal{I}:=\{1,\cdots,K\})$ で表されるような線形計画問題を考える．ここで，$\Omega$ は与えられた閉凸集合であり，不確実性を含まない．また，$\hat{\gamma}^i\in\mathbb{R}^{m_i}$ および $(\hat{A}^i,\hat{b}^i)\in\mathbb{R}^{m_i\times(n+1)}$ は不確実性を含むベクトルまたは行列であり，各々に対する不確実性集合は $\mathcal{U}_i,\mathcal{V}_i$ で与えられるとする．このとき，ロバスト線形計画問題は以下で表される．

$$
\begin{aligned}
&\min_x \sup_{(\hat{A}^0,\hat{b}^0)\in\mathcal{U}_0,\hat{\gamma}^0\in\mathcal{V}_0} (\hat{\gamma}^0)^\top(\hat{A}^0x+\hat{b}^0)\\
&\text{s.t.} \sup_{(\hat{A}^i,\hat{b}^i)\in\mathcal{U}_i,\hat{\gamma}^i\in\mathcal{V}_i} (\hat{\gamma}^i)^\top(\hat{A}^ix+\hat{b}^i)\le 0\\
&\qquad (i\in\mathcal{I}),\quad x\in\Omega
\end{aligned}
\tag{1}
$$

不確実性集合 $\mathcal{U}_i,\mathcal{V}_i$ は以下の仮定を満たすものとする．

**仮定 1.** $i=0,1,\cdots,K$ に対して，不確実性集合 $\mathcal{U}_i$ と $\mathcal{V}_i$ は**楕円体**で表される．

仮定 1 の下で，問題(1)を SDP に再定式化することを考える．問題(1)の目的関数および制約関数の値は，$x$ を固定した $\hat{A}^i,\hat{b}^i,\hat{\gamma}^i\ (i=0,1,\cdots,K)$ に対する最大化問題の最適値として定義されるが，仮定 1 より，その最大化問題は非凸二次計画問題（目的関数が非凸）として書くことができる．ここで，非凸二次計画問題に対する双対性理論[1]に基づき，目的関数および制約関数における最大化問題をその双対問題を用いて変換すると，問題(1)の緩和問題として以下の SDP を得る．

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,\alpha,\beta,\lambda_0} -\lambda_0\\
&\text{s.t.}\\
&\begin{bmatrix} P_0^0(x) & q^0(x)\\ q^0(x)^\top & r^0(x)-\lambda_0\end{bmatrix}\succeq \alpha_0\begin{bmatrix} P_1^0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\beta_0\begin{bmatrix} P_2^0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\\
&\begin{bmatrix} P_0^i(x) & q^i(x)\\ q^i(x)^\top & r^i(x)\end{bmatrix}\succeq\begin{bmatrix} \alpha_iP_1^i+\beta_iP_2^i & 0\\ 0 & \alpha_i+\beta_i\end{bmatrix}(i\in\mathcal{I}),\\
&\alpha=(\alpha_i)_{i=0}^K\in\mathbb{R}_+^{K+1},\ \beta=(\beta_i)_{i=0}^K\in\mathbb{R}_+^{K+1},\ x\in\Omega
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで，$P_1^i, P_2^i\ (i=0,1,\cdots,K)$ は定数行列であり，

$P_0^i(x), q^i(x), r^i(x)\ (i=0, 1, \cdots, K)$ は $x$ に関する線形関数であるが，具体的な構造は本稿では割愛する．

さらに，以下の仮定が成り立つとき，問題(1)とSDP (2)が等価であることを示せる．なお，以下の仮定は，非凸二次計画問題の強双対性に対する十分条件から導かれたものである[1]．

**仮定 2**．$z^*:=(x^*, \alpha^*, \beta^*, \lambda_0^*)$ を SDP (2)の最適解とする．このとき，ある近傍 $B(z^*, \varepsilon)$ が存在して，すべての $(x, \alpha, \beta, \lambda_0^*)\in B(z^*, \varepsilon)$ に対して $\dim(\ker(P_0^i(x)-\alpha_i P_1^i-\beta_i P_2^i))\neq 1\ (i=0, 1, \cdots, K)$ が成り立つ．

**定理 2.1**．仮定 1 および仮定 2 が成り立つとする．このとき，$(x^*, \alpha^*, \beta^*, \lambda_0^*)$ が SDP (2)の解ならば，$x^*$ は問題(1)の解である．

仮定 2 は，SDP (2)の解の近傍のすべての点について成り立つ必要があるため，それを確かめるのは一般に困難である．しかし，以下の二つの条件のいずれかが満たされるならば，仮定 2 が自動的に成り立つことを示せる．

- $z^*$ において，$P_0^i(x^*)-\alpha_i^* P_1^i-\beta_i^* P_2^i$ が正則である．
- 不確実性集合 $\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i$ が球として与えられる．

特に後者は，$P_0^i(x^*)-\alpha_i^* P_1^i-\beta_i^* P_2^i$ の固有値が常に 2 以上の重複度をもつことが証明の鍵となる．

## 3．ロバスト SOCP への適用

SOCP とは二次錐 $\mathcal{K}^n:=\{(x_0, \bar{x}^\top)^\top\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}|x_0\geq\|\bar{x}\|\}$ を制約にもつ最適化問題であり，幅広い問題を定式化できるため，近年盛んに研究されている．本節では，以下のロバスト SOCP を考える．

$$\begin{aligned} &\min_x \quad f^\top x \\ &\text{s.t.}\ \|\hat{A}^i x+\hat{b}^i\|\leq(\hat{c}^i)^\top x+\hat{d}^i, \\ &\quad \forall(\hat{A}^i, \hat{b}^i, \hat{c}^i, \hat{d}^i)\in\mathcal{U}_i, \\ &\quad (i\in\mathcal{I}),\quad x\in\Omega \end{aligned} \tag{3}$$

また，不確実性集合は次の仮定を満たすものとする．

**仮定 3**．問題(3)に対する不確実性集合 $\mathcal{U}_i\ (i\in\mathcal{I})$ は楕円体で表される．

仮定 3 が成り立つとき，問題(3)は適当な変換により，問題(1)に書き換えることができる．よって，前節の結果から，問題(3)も SDP に変換することができる．さらに，定理 2.1 も成立する．

ところで，本研究とほぼ同時期に，Hildebrand[4]により Lorentz-positive map の概念が提案され，その十分条件が示された．この結果を用いれば，仮定 3 を満たすロバスト SOCP を本研究とは異なる形の SDP に変換することができる．しかし，本研究のアプローチで得られる SDP に比べて，Hildebrand のアプローチで得られる SDP は遥かにサイズが大きくなってしまう．実際，前者は変数の数が $O(n)$，行列不等式のサイズが $O(mn)$ であるのに対し，後者はそれぞれ $O(m^2n)$ および $O(m^4n^2)$ となる（$n$ は変数の個数，$m$ は二次錐の次元である）．

## 4．ロバスト Nash 均衡問題への適用

2 節で提案した再定式化手法は，ロバスト SOCP だけでなく，ロバスト Nash 均衡問題における未解決問題にも適用できる．各プレイヤー $i=1, \cdots, N$ が二次のコスト関数をもち，混合戦略を取るようなロバスト Nash 均衡問題を考える．このとき，プレイヤー $i$ が解くべき最小化問題は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} &\min_{x^i}\ \sup_{\substack{\hat{x}^j\in X_{ij}(x^j),(j\neq i)\\ \hat{A}_{ij}\in D_{ij}(j=1,\cdots,N)}} \frac{1}{2}(x^i)^\top\hat{A}_{ii}x^i+\sum_{j\neq i}(x^i)^\top\hat{A}_{ij}x^j \\ &\text{s.t.}\quad \textstyle\sum_{j=1}^{m_i}x_j^i=1,\ x^i\geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$X_{ij}(x^j)$ はプレイヤー $j$ の戦略 $x^j\in\mathbb{R}^{m_j}$ がプレイヤー $i$ のコスト関数に反映されるときに生じる誤差に関する不確実性集合で，$x^j$ に対する点集合写像として与えられる．また，$D_{ij}$ はコスト関数の係数行列 $A_{ij}$ に関する不確実性集合である．これらの集合に対して，以下の条件が成り立つと仮定する．

**仮定 4**．各プレイヤー $i=1, \cdots, N$ に対して，不確実性集合 $X_{ij}(\cdot)$ と $D_{ij}$ はそれぞれ半径 $\sigma_{ij}, \rho_{ij}$ の球で与えられる．すなわち，$X_{ij}(x^j)=\{x^j+\delta x^{ij}|\|\delta x^{ij}\|\leq\sigma_{ij}, \sum_{k=1}^{m_j}\delta x_k^{ij}=0 (j\in\{1, \cdots, N\}\backslash\{i\})\}$, $D_{ij}:=\{A_{ij}+\delta A_{ij}\in\mathbb{R}^{m_i\times m_j}|\|\delta A_{ij}\|_F\leq\rho_{ij}\}$ で表される．

従来の研究[3]では，仮定 4 において，すべての $i$, $j$ に対して $\rho_{ij}=0$ であるときに限り，各プレイヤーが解くべき問題が SOCP に帰着できることが知られていた．これに対して，本論文では，2 節と同様の議論を用いることによって，$\sigma_{ij}>0$ かつ $\rho_{ij}>0$ であるような場合でも，各プレイヤーが解くべき問題が SDP に再定式化できることが示せた．さらに，均衡状態では，各 SDP に対して KKT 条件（1 次の最適性条件）が成立するので，ロバスト Nash 均衡解を求める問題はそれらの KKT 条件をまとめて，一つの半正定値相補性問題として表すことができる．また，論文中では仮定 4 を満たすときには，行列 $A_{ii}$ に対する半正定値性の仮定の下で，均衡解の存在性も示している．

## 5. 数値実験

本稿では詳細を省略するが，数値実験の結果は以下のように要約される．(i)本論文のSDP変換アプローチと，Hildebrand[4]に基づくSDP変換アプローチに対して，問題のサイズやCPU時間に関する比較を行った．提案した再定式化手法では，すべての問題を十分速く解くことができたが，Hildebrand[4]に基づく再定式化では，解を得るのにかなり長い時間がかかることが見て取れた．また，(ii)仮定2に相当する条件が成立しているとき，SDPを解くことによってロバストSOCPの最適解が確かに求まること，(iii)仮定2が非常に多くのテスト問題（実行可能な問題の99%以上）で成立すること，(iv)たとえ仮定2が成立しない場合でも，真の最適値から0.1%以内の良い近似解が得られることをそれぞれ確認した．さらに，ロバストNash均衡問題に関しても，再定式化により得られるSDCPを既存のアルゴリズムを用いて解くことにより均衡解が得られることを確かめた．

### 参考文献

[1] Beck, A. and Eldar, Y. C.: Strong duality in nonconvex quadratic optimization with two quadratic constrains, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 17, 844-860, 2006.

[2] Ben-Tal, A. and Nemirovski, A.: Selected topics in robust convex optimization, *Mathematical Programming*, Vol. 112, 125-158, 2008.

[3] Hayashi, S., Yamashita, N. and Fukushima, M.: Robust Nash equilibria and second-order cone complementarity problems, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, Vol. 6, 283-296, 2005.

[4] Hildebrand, R.: An LMI description for the cone of Lorentz-positive maps II, preprint, 2008.