近接グラフ

渡部　大輔

近接グラフとは，平面上において点同士の近さに基づいて定義されるグラフである．計算幾何学の理論を用いることで，効率的に近接グラフを構築するアルゴリズムが提案されている．近接グラフを用いることで，近い場所を結んでいく近接性に基づく構築原理を再現することができることから，都市工学の分野では，交通網の形態分析および利便性評価が研究されている．

1.　近接グラフとは

近接グラフ（proximity graph）とは，平面上において点同士の近さに基づいて定義されるグラフである[1]．近接グラフは，グラフの辺が互いに端点以外では交差しないという**平面グラフ**（planar graph）の特性を持ち，**幾何グラフ**（geometric graph）とほぼ同義に用いられている．図形データを計算機で扱う幾何的情報処理については，**計算幾何学**（computational geometry）の理論を用いることで，効率的に近接グラフを構築するアルゴリズムが提案されている[2]．

近接グラフによって，近い地点同士を結ぶことによるネットワークの構築原理が再現できるので，交通網の形態分析や利便性評価の研究が行われている．以下にその概略を解説する．

2.　近接グラフの構築方法

グラフは，n 個の点の集合 $V=\{v_1, \cdots, v_n\}$，点に接続する m 本の辺の集合 $E=\{e_1, \cdots, e_m\}$ の組であり，$G=(V, E)$ で表す．母点間の近接性は，ユークリッド距離で評価される．一般的な表記として名前が PG である近接グラフは $G_{\mathrm{PG}}=(V, E_{\mathrm{PG}})$ と表す．代表的な近接グラフとして，下記の 6 種類のグラフがあり，その構築方法について解説する．

- 孤立最近接対（reciprocal pairs, RP）：点 v_i から見て点 v_j が最も近く，かつ点 v_j から見て点 v_i が最も近い点の場合に，二点間を結ぶ有向辺のグラフ（**最近点対**）
- 最近傍グラフ（nearest neighborhood graph, NNG）：点 v_i から見て点 v_j が最も近い点の場合に，二点間を結ぶ有向辺のグラフ
- 最小木（minimum spanning tree, MST）：すべての点を互いに到達可能にするグラフのうちで辺の総長が最小であるグラフ（**最小全域木，最小木問題**）
- **相対近傍グラフ**（relative neighborhood graph, RNG）：点 v_i と点 v_j を中心として 2 点を結ぶ線分を半径とする円の重複部分に二点以外の点がない場合に，二点間を結ぶ辺で構成されるグラフ
- **ガブリエルグラフ**（gabriel graph, GG）：点 v_i と点 v_j を中心として 2 点を結ぶ線分を直径とする円の内部に二点以外の点がない場合に，二点間を結ぶ辺で構成されるグラフ
- ドローネ網（delaunay triangle, DT）：三点以上の点に内接する円の内部に他の点がない場合に，それらの点を結ぶ辺で構成されるグラフ（**ドロネー図**）

この中で最小木だけが，局所的な点の近接性だけでなく，全体の最適性を必要とする．そのため，厳密には近接グラフではないが，ドローネ網の部分グラフであることから，他の近接グラフとも関係が深い．

ドローネ網は，**ボロノイ図**の双対グラフであることから，グラフの辺が互いに端点以外では交差しない平面グラフとなる．そして各グラフ間の関係は，$E_{\mathrm{RP}} \subseteq E_{\mathrm{NNG}} \subseteq E_{\mathrm{MST}} \subseteq E_{\mathrm{RNG}} \subseteq E_{\mathrm{GG}} \subseteq E_{\mathrm{DT}}$ である．つまり，これまで紹介したグラフはすべてドローネ網の部分グラフであることから，まずドローネ網を計算し，その辺のみを候補として辺を探すことにより効率よく構成できる．一様ランダムに発生させた点（100 点）に対する近接グラフを図 1 に例示する．

わたなべ　だいすけ
東京海洋大学 海洋工学部
〒135-8533 江東区越中島 2-1-6

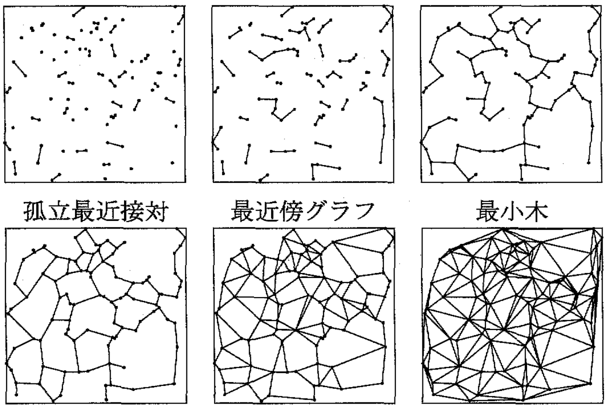

図1　近接グラフの構築例

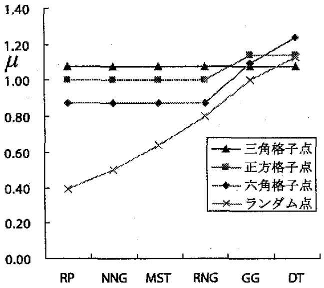

図2　各近接グラフの平均辺長

図3　道路網と相対近傍グラフの比較

3.　近接グラフを用いた交通網分析

近接グラフを用いることで，近い場所を結んでいく近接性に基づく構築原理を再現することができることから，都市工学の分野では，交通網の形態分析および利便性評価が研究されている．

近接グラフの形態について，グラフ辺の長さの確率密度関数，期待値，分散に基づく比較が行われている[4]．面積 S の対象領域に，点が密度 $\rho(=n/S)$ でランダムに分布するとき，幾何確率に基づいて最近隣距離を導出できる．近接グラフの辺が構築される場合，ある点から見て限定された探索領域内にある最も近い点が結ばれていることから，近接グラフの辺の長さは，探索領域を限定した場合の最近隣距離と等価になる．各近接グラフにおける辺長の期待値 μ は，点の密度 $\rho=1$ の場合，図2のように，孤立最近接対からドローネ網へと近接性から見た点の探索領域が狭くなるにつれて短くなる．また，点が密度 ρ で規則的に分布する場合と比較すると，辺長の期待値 μ はランダム点分布における点間に構築された場合の方が概ね短い．

交通網として近接グラフ上を移動する場合の利便性について，**都市構造分析**で用いられる距離分布により評価されている[4]．そこでは，一辺 a の正方形を対象領域として，ランダムな点における近接グラフを構築し，点間に一様に発生する交通需要に対して，近接グラフ上を最短距離で移動する場合と，直線距離および格子状道路網を表す直交距離で連続的に移動する場合について距離分布が算出されている．相対近傍グラフ上を最短距離で移動する場合の平均移動距離は $2a/3$ 程度であり，直交距離で移動する場合の効率にかなり近い．距離分布についても，直交距離で移動する場合の分布形状とほぼ一致している．一方，直線距離との比は，相対近傍グラフ上を最短距離で移動する場合と直交距離で移動する場合を比較すると，比の平均値はともに1.27程度と近いが，比の分布形状は大きく異なる．

近接グラフによる現実の道路網の形態解析について，道路が交差点間の近接性に基づいて連結されていることを仮定し，**地理情報システム**を用いて研究されている[3]．まず，道路網から交差点を主とした道路の端点を抽出する．これを母点として，各近接グラフを構築する．そして，構築したグラフ辺と道路網を構成する辺を重ね合わせ，一致する辺を抽出することにより，道路一本一本に対応する近接グラフを把握することができる．特に，道路の端点を母点とした相対近傍グラフを構築することにより，図3の太線の辺のように，市街地の区画道路において格子状道路が整備されている地区を特定することができる．

近接グラフを用いて，点からグラフを構築することにより，線や面により様々な隣接関係を把握することができる．近接グラフは，今回解説した都市工学だけでなく，形態学，通信工学，画像解析など多様な自然現象，社会現象にも応用可能である[1]．

参考文献

[1] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K. and Chiu, S. N.: *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, Second Edition*, 97-103, John Wiley and Sons, 2000.

[2] 杉原厚吉：「FORTRAN 計算幾何プログラミング」，岩波書店, 1998.

[3] 渡部大輔：交差点間の近接性に着目した都市内道路網形態の解析, 都市計画論文集, 40 (3), 133-138, 2005.

[4] Watanabe, D.: Evaluating the configuration and the travel efficiency on proximity graphs as transportation networks, *FORMA*, 23 (2), 81-87, 2008.