ORメモランダム

古典的オーヴァーハングパズルをLPで解く

松井　知己

1. はじめに

数理計画の授業等において，線形計画問題を紹介した際に，適当なソフトウェアを使って，実際に解く様子を見せるのは，学生のモチベーションを高めるのに重要と思われる．しかしながら，このとき解いてみせる問題の選択が非常に難しい．ここでは，問題はすぐ分かるが，最適解がすぐには分からない問題例として，古典的オーヴァーハングパズルの例を提示する．

図1のように，長さ2の板を机の端から少しずつずらして積み上げ，1番上の板を机の端からできるだけ遠くへ離すことを考えよう．ただし1番下の板は，机からはみ出てはいけないとする．

図1は7枚の板の場合を示しているが，この図のように，1番上の板は（2番目の板から）1の長さ右にずらし，2番目の板は（1/2）の長さ右にずらし，3番目の板は1/3の長さ右にずらし，…，6番目の板は（1/6）の長さ右にずらすと，（理論的には）崩れずに積み上げることができる．一般的に，長さ2の板が$n+1$枚あれば，上からi枚目の板を，その下の$i+1$枚目の板から，$1/i$だけ右にずらした配置は，崩れずに積み上がることは，容易に確認できる．この積み方によって，1番上の板は机の端から$1+1/2+\cdots+1/n$，これをH_nと書く，の距離だけ離すことができる．ちなみに，H_nはハーモニック数と呼ばれ，nが大きくなると無限大に発散することが知られている．すなわち，十分な数の板があれば，どんな遠くにも届くアーチを作ることができる．

さてここで考えるのは，$n+1$枚の板があるとき，1枚目の板は机の端から最大どこまで離せるか？　という問題である．実は上記の積み方が最適であり，1枚目の板はH_nより遠くに離すことができない．以下では，この問題について線形計画を用いてアプローチしてみよう．

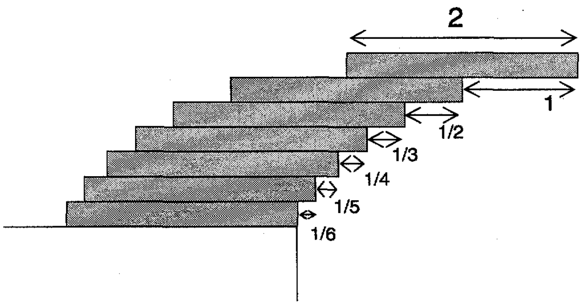

図1　7枚の板でのオーヴァーハング

2. 線形計画問題を解いて考える

まずは問題を数学モデルで記述してみよう．板は$n+1$枚あるとし，上から1枚目の板，2枚目の板，…，$n+1$枚目の板，と呼ぶ．$n+1$枚目の板は，右端を机の端につけて置く．机の面と平行に数直線を取り，x軸と名付け，机の右端が1になるように，原点を机の端から左に距離1のところに取る（図2参照）．i枚目の板の重心のx座標をx_iと書く．明らかに$x_{n+1}=0$である．

上から1〜k枚目までの板を1つの物体と考えたと

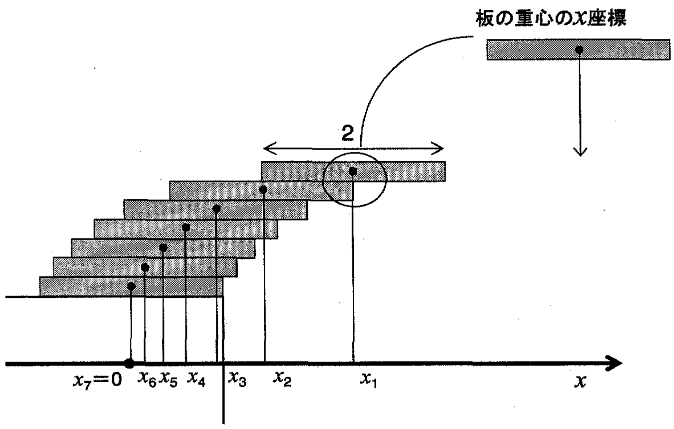

図2　各板の重心のx座標

まつい　ともみ
中央大学 理工学部
〒112-8551 文京区春日 1-13-27

きの重心の x 座標は $(x_1+x_2+\cdots+x_k)/k$ となり，これは $k+1$ 枚目の板の右端より左側に位置しなければならない．すなわち，$(1/k)\sum_{i=1}^{k}x_i\leq x_{k+1}+1$ が成り立つ．ここで，1枚目の板の右端の x 座標は x_1+1 であり，机の端の x 座標は1である．

すると，一番上の板の重心をできるだけ机からはみ出させる問題は，次のような線形計画問題として定式化できる．

$$\begin{aligned}&\max.\ x_1\\&\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{k}x_i-kx_{k+1}\leq k\ (k=1,2,\ldots,n),\\&\qquad x_{n+1}=0.\end{aligned}$$

実際に $n+1=9$ とした問題

$$\begin{aligned}&\max.\ x_1\\&\text{s.t.}\\&(y_1)\quad x_1-x_2\leq 1\\&(y_2)\quad x_1+x_2-2x_3\leq 2\\&(y_3)\quad x_1+x_2+x_3-3x_4\leq 3\\&(y_4)\quad x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5\leq 4\\&(y_5)\quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-5x_6\leq 5\\&(y_6)\quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6-6x_7\leq 6\\&(y_7)\quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7-7x_8\leq 7\\&(y_8)\quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8-8x_9\leq 8\\&(y_0)\quad x_9=0\end{aligned}$$

を解いてみると，次のような最適解が得られる（上記の $y_0,\ldots,y_8$ は，次節で双対問題を扱う際に用いる式番号である）．

図3のB列が最適解である．D列に $1/(x_{k+1}-x_k)$ の値を表示すると，板のズレ幅が上から1/1，1/2，1/3，…，1/8という値に近いものになっているのが分かる．また，C列に板の長さ2を入れて，B列とC列を積層棒グラフで表示すると，実際に積み上げた際の様子が想像できる（棒グラフの縦軸の数値は無視して下さい．実演する場合，縦軸まで気にする余裕はありませんので，それと同じ図にしました）．

実際に線形計画を解くところから，棒グラフの表示まで，適当な線形計画ソフトとスプレッドシートソフトウェアを用いて数分でできるため，授業中に学生の目の前ですべて操作してみせることが可能である．

3．一般の枚数への拡張

本稿では，前節の結果をさらに拡張して，板の枚数が一般の場合について考察してみよう．

前節のように，数枚の板を用いる問題ならば，その最適解を実際に求めることができる．では，一般に $n+1$ 枚の板では最適解はどうなるのだろうか？　板のズレ幅を上から1/1，1/2，1/3，…，$1/n$ として実際に積み上げることが可能であることは，そのような解が前節の線形計画問題の許容解となることで確かめられる（この確認は読者に任せることにしよう）．

では，このような積み上げ方が『板が何枚でも』最適解なのだろうか？　すなわち『板が $n+1$ 枚のとき，1枚目の板は H_n より遠くに離すことができない』という命題はどうやって証明すれば良いのだろうか．この命題を示すには，1枚目の板を H_n より遠くに離すような積み方が存在しないことを示さねばならず，『何かが存在しない』という命題となっている．このため残念ながら，すべての積み方を試すといった単純な証明法は存在しないと思われる．

これに対し，有用な示唆を与えてくれるのが双対最適解だ．$n+1=9$ に対する双対最適解は以下のようになっている．

ただし双対変数 $y_k(k=1,2,\ldots,n)$ は，制約式 $\sum_{i=1}^{k}x_i-kx_{k+1}\leq k$ に対応し，制約式 $x_{n+1}=0$ に対応する双対変数を y_0 としてある．この結果から類推すると，$k=1,2,\ldots,n-1$ については $y_k=1/(k(k+1))$ とし，$y_n=1/n$, $y_0=1$ と置いたものが双対最適解になると予想される．

ではこの双対解を使って，$x_1\leq H_n$ が成り立つこと

	A	B	C	D	E
1	k	Xk	板長	1/(Xk+1−Xk)	
2	1	2.717857	2	1.00000	
3	2	1.717857	2	2.00000	
4	3	1.217857	2	3.00000	
5	4	0.884524	2	4.00000	
6	5	0.634524	2	5.00000	
7	6	0.434524	2	5.99999	
8	7	0.267857	2	7.00001	
9	8	0.125	2	8.00000	
10	9	0	2		
11					

図3　最適解

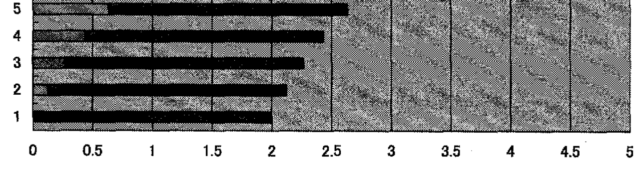

図4　最適解の配置

	A	B	C	D
1	k	Yk	1/Yk	
2	1	0.5	2.0000	
3	2	0.167	6.0000	
4	3	0.083	12.0000	
5	4	0.05	20.0000	
6	5	0.033	30.0003	
7	6	0.024	41.9992	
8	7	0.018	56.0004	
9	8	0.125	8.0000	
10	0	1	1.0000	
11				

図5　双対最適解

を示してみよう．

定理　$n+1$ 個の実数 $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ が，

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}x_i-kx_{k+1}\le k\ (k=1,2,\dots,n),\\ x_{n+1}=0,\end{cases}$$

を満たすならば，$x_1\le H_n=\sum_{i=1}^{n}(1/i)$ である．

証明　背理法を用いて証明する．$n+1$ 個の実数 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n+1}^*)$ が，

$$\sum_{i=1}^{k}x_i^*-kx_{k+1}^*\le k\quad(k=1,2,\dots,n),\tag{1}$$

$$x_{n+1}^*=0,\tag{2}$$

$$x_1^*>H_n\tag{3}$$

を満たすと仮定して矛盾を導く．

$k=1,2,\dots,n-1$ に対し，上記の(1)式の両辺を $1/(k(k+1))$ 倍した式を作り，$k=n$ の(1)式の両辺を $1/n$ して得られる式 $(1/n)\sum_{i=1}^{n}x_i^*-x_{n+1}^*\le 1$ と，(2)式 $x_{n+1}^*=0$，これらすべての両辺を加えると，以下の式が成り立つ．

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i^*-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}x_{k+1}^*\right)+\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^*\right)$$

$$\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}+1+0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\frac{x_i^*}{k(k+1)}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^*-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}x_{k+1}^*\le H_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=i}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)x_i^*+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^*-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}x_i^*\le H_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n}\right)x_i^*+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^*-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}x_i^*\le H_n,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}x_i^*-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}x_i^*\right)+\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}x_i^*+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^*\right)\le H_n,$$

$$x_1^*\le H_n.$$

上記より $x_1^*\le H_n$ が成り立ち，(3)式 $x_1^*>H_n$ と矛盾する．□

上記で示したような『○○は最大である』という命題は，実は『○○より大きいものが無い』という命題と同じであり，一般に『△△が無い』という命題を示すのは容易でないことが多い．上記で用いたカラクリは，『線形不等式を，非負の重みを掛けて足し合わせ，矛盾を導く』というものであるが，用いる非負重みに何を用いたら良いのかを見つけるのは容易ではない．これに対し，線形計画法の双対最適解が，良い重みを示唆してくれることが分かる．

4.　おわりに

本稿では，古典的なオーヴァーハングについて，線形計画問題としての定式化を行った．また双対最適解を用いて，板の枚数が一般の場合について考察を行った．

ちなみに『古典的でない』オーヴァーハングについては有名な論文[1]があり，綺麗な発表スライドも公開されている．その後も文献[2]といった論文があるので，興味のある方は最新の研究成果を検索されると良いだろう．

参考文献

[1] M. Paterson and U. Zwick, Overhang, SODA 2006, 231-240.

[2] M. Paterson, Y. Peres, M. Thorup, P. Winkler and U. Zwick, Maximum Overhang, SODA 2008, 756-765.