論文・事例研究

ARモデルとフラクタル分析による株価予測の検証

天達　洋文，上田　　徹，池田　裕一

1.　はじめに

企業等で経済時系列予測を行う場合，予測モデル式を作ると説明変数や外生変数の予測にある程度の仮定や価値判断が必要なことが多く，また，予測モデル自体もさまざまのものが考えられるために，計画担当者は関係者の議論を収束させるのに苦労することが多い．その点，回帰式などに過去のデータを機械的に適用する予測手法は，議論の余地が少なく，使いやすい方法である．また，多くの理論的研究がなされて，教科書などになっている（文献[1][2]など）．しかし，この方法は中長期の予測精度が良くないといわれているために，採用を躊躇することも多い．計画担当者の立場からは，実際上どの程度の精度で予測できるのかが知りたいところである．しかし，実際に予測をした事例研究を探したが，適当な例が見つからなかった．

本事例研究では，過去のデータを機械的に適用する代表的予測手法であるAR（Auto Regression）モデルがどの程度の予測精度を持つのかを調べ，次に，フラクタル分析を用いたときに，ARモデルの予測精度がどの程度上がるかを調べた．データとしては，過去30年間の1部上場企業の株価データを用いる．

構成は，事例研究に用いるデータを説明し，ARモデルによる予測精度を報告する．次に，フラクタル分析を説明し，予測精度がどの程度変わるかを検証する．最後に，個々の企業の株価に適用したときの予測精度の様相を記載する．

あまたつ　ひろふみ
成蹊大学 工学研究科情報処理専攻
うえだ　とおる
成蹊大学 理工学部情報科学科
いけだ　ゆういち
成蹊大学 工学研究科客員研究員
〒180-8633 武蔵野市吉祥寺 3-3-1
受付 08.8.11　採択 09.5.25

2.　データ

2.1　検証に用いるデータ

1975年から2005年までに東京証券取引所市場第1部に上場した3,838社の株価データを用いる．株価データには始値，高値，安値，終値などいくつかのデータがあるが，株取引の1件ごとを記録したティックデータの分析により，1日内では相関が強いことが分かっている（文献[3]など）ので終値だけを用いる．

3,838社の株価データのうち，時系列予測の検証に適さない次のデータは除く．

i　上場期間1000日未満の1,526社
ii　長期間，不自然な株価である9社（図1）
iii　上場の大部分の期間値動きのない6社（図2）
iv　長期間の株価データのない14社（図3）
v　200日間で株価が極端に下落している264個の200日間のデータ（図4）

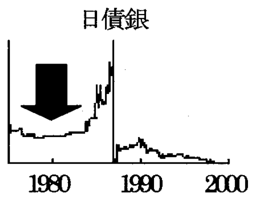

図1　不自然な株価

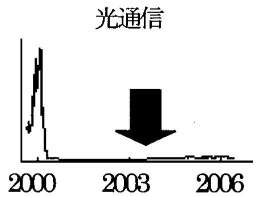

図2　変動のない株価

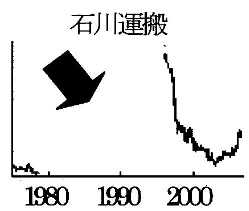

図3　データがない

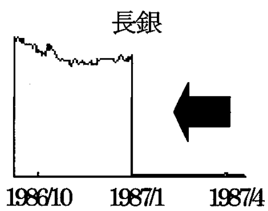

図4　極端な変動

（注：vで，200日間で株価が極端に下落しているのは，業績悪化や倒産などが大部分である．これらは予測ではなく，調査機関やIRなどで対処し，理論的にはリアルオプション[4]で取り扱うべきであるので本事例研究の対象外とした．下落する200日間以外の期間はデータとして用いた）

2.2 検証データの生成と予測期間

検証に用いる2,283社の終値データを100日ごとに分割し，100日未満のデータを無視すると，117,717個の100日単位の実績データを得ることができた．予測は次のように行う．同一会社の200日間のデータを100日ごとに順次に取り出す．前半の実績データを用いて次の100日間の株価を予測し，後半の100日間の実績データと比較して予測精度を評価する．図5は予測の一例である．横軸は日数，縦軸は株価，細線は株価の実績データ，太線は予測を表す．実績データは−99日から始まっている．−99日から0日までの実績データを用いて，1日から100日までの予測を行い，1日から100日までの実績データと比較する（図6, 12も同じ表記方法）．100日間で区切る根拠は特にないが，実稼働で100日間のデータで100日先までの予測精度を知れば十分だろうと判断した．

3. ARモデルによる予測

ARモデルは回帰式に過去のデータを機械的に適用する予測手法で，次式で表せる（[1][2]）．

$$\hat{x}(s)=\sum_{m=1}^{M}a(m)x(s-m)+C \tag{1}$$

$x(s-m)$は$s-m$日目の実績データ，$\hat{x}(s)$はs日目の予測値，Mは次数．ARモデルは，過去の実績データから，予測誤差$\hat{x}(s)-x(s)$の自乗和が最小になる$a(m)$とCを求め，これらを用いて予測をする．

計算は，トレンドを除くために実績データの一次差分値$\{\Delta x_t=x(t)-x(t-1)\}$から一次差分値を予測し，予測した一次差分値を累積して，株価の予測値とする．

予測値の誤差率（以下誤差率といい，εで表記する）は，{(予測値−実績データ)÷実績データ}の絶対値で計る．

次数Mを決めるには決定係数や情報量規準(AIC)など多くの手法[1]があるが，本事例研究では，Mの値を変えたときに，予測誤差はどうなるかを見て決める．

Mを大きくするとARモデルは図6のように振動や発散をする．なお，図5は$M=1$である．

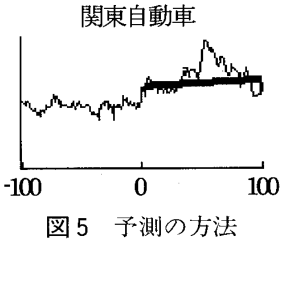

図5　予測の方法

Mが10以下の場合の誤差率の変化を表1にまとめた．表1では2.2節で述べたように100日間の実績データで100日間の予測を行い100日目の誤差率の平均εを求める．1行目はMの値，2行目は平均誤差率，3行目からは誤差率εの度数分布（列和=1）を示した．例えば，$M=1$で平均誤差率が0.1（10%）未満（$\varepsilon<0.1$）になる件数は，33,450件なので，全データ件数117,717で割って，0.28（28%）とする（表2の度数分布も同じ）．

表1から分かるようにMを大きくしても平均誤差率の改善はほとんど見られない．AICのいわゆる「ケチの原理」に従えば，Mの小さなモデルが良いことになる．ある程度のデータへの追随性も確保するために以後は$M=2$とする．

次に，予測期間が変わると予測誤差はどの程度変わるかを調べる．100日間の全実績データで，5, 10, 15, 20, 25, 50, 75, 100, 150, 200日目の予測値の誤差率を求めた．図7はその結果である．横軸は予測の日数，縦軸は誤差率である．予測期間と平均誤差率はほぼ比例し，100日目で，26%程度の誤差率になる．

4. フラクタル分析を用いた誤差率の改善

4.1 フラクタル分析の概要

ARモデルの誤差率を改善する方法として，フラク

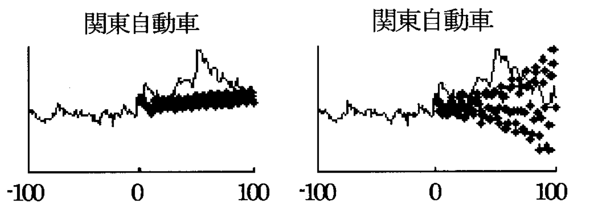

図6　次数Mの大きさでの予測値の振動と発散．左は$M=20$，右は$M=30$

表1　M（次数）を変えたときの平均誤差率の変化

M	1	2	3	4	7	10
平均誤差率	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.27
(層別)	度数分布					
ε<0.1	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28
0.1<ε<0.2	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.22
0.2<ε<0.3	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17
0.3<ε<0.4	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11
0.4<ε<0.5	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.08
0.5<ε<0.6	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
0.6<ε	0.08	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09

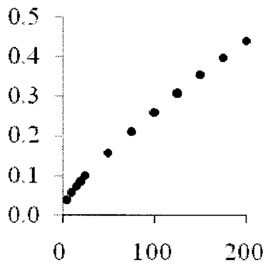

図7　予測期間と誤差率

タル分析を利用し，どの程度改善するかを調べる．

フラクタル分析では，自己相似をフラクタルと言っている．フラクタル分析は，空間的な自己相似性をとらえることから始まったが，時間的変動の自己相似性に応用することが広くなされている（文献[3][5][6]など）．株価は過去との自己相関があることが知られている．時系列データがフラクタルなのかを判断する方法と，フラクタルのときの相似の程度を測定する方法は，数多く提案され，教科書になっている（文献[3][5][6]など）．ここでは，フラクタルなのかを判断する方法に樋口法[7]を使い，相似の程度を測定する方法にハースト指数[8]を用いる．

4.2　樋口法の概要

N 個の時系列データを k 個のサブセットに分割し，時系列データの組

$$\tilde{x}_m(k);\ x(m), x(m+k), x(m+2k), \cdots,$$
$$x\left(m+\left[\frac{N-m}{k}\right]\cdot k\right) \quad (m=1, 2, \cdots, k)$$

を k 個作成する．

この作成された一つ一つの $\tilde{x}_m(k)$ に対して長さ $L_m(k)(m=1, 2, \cdots, k)$ を次のように定義する．

$$L_m(k)=\left(\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{N-m}{k}\right]}|x(m+ik)-x(m+(i-1)k)|\right)\times\frac{N-1}{\left[\frac{N-m}{k}\right]\cdot k}\right)/k$$

k 個のサブセットに分割したときの時系列の長さ $l_h(k)$ を $L_m(k)$ の算術平均と定義する．

$$L_h(k)=\sum_{m=1}^{k}L_m(k)/k$$

図8のように $(\log k, \log L_h(k))$ のプロットを●印で描くとフラクタル性を持つ時系列はほとんど直線上に乗る（注：図8では $\log L_h(k)$ は log(Lhk) と記載した．また，プロットであることを分かりやすくするために，プロットを間引いている）．このプロットに最小自乗法で直線を近似する．時系列がフラクタルであると仮定するにはプロットと近似した直線の相関係数が0.999（以上）ぐらい必要であるといわれている[7]．

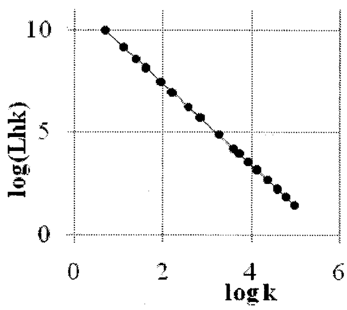

図8　樋口法の R

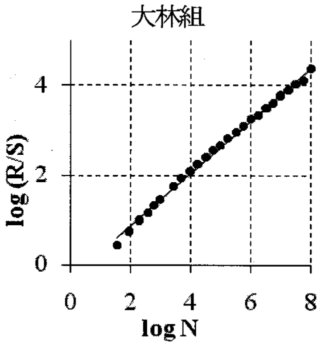

図9　ハースト指数

4.3　株価はフラクタル性を持つ

株価がフラクタル性を持つことは多くの文献に記載されている（文献[3][5]など）．2.1節で述べた2,283社について，各社の全期間の実績データに樋口法を適用すると，相関係数はすべて0.999以上になった．したがって，本事例研究で使う株価はすべてフラクタル性があるといえる．

4.4　ハースト指数の概要

ハースト指数は，ハーストによって，ナイル川の流量などの長期の自己相似性を持つ時系列の分析のために発案されたフラクタル次元の1種である．時系列データをデータ数が N 個のサブセットに分割し，分割したサブセットごとに累積偏差を求め，その最大値と最小値の差 R をとる．またサブセットの標準偏差 S を求める．$(\log N, \log(R/S))$ を図9のようにプロットし，最小自乗法で直線を近似し，勾配 H を求める．H がハースト指数である．図9は図8同様にプロットを間引いてある．なお，通常，log の底はネイピア数(e)を使うので図8はネイピア数(e)を底にしたが，これ以降は2にする．

時系列データがフラクタルであれば，ハースト指数 H に関して，任意の $n>0$ に対して統計的に次式が成り立つ[5]．

$$x(t_0+nt_1)-x(t_0)\propto n^H\{x(t_0+t_1)-x(t_0)\} \tag{2}$$

ハースト指数は自己相関と関係がある．時刻 t を中心とした過去時刻 $t-h$ での $x(t-h)$ と将来時刻 $t+h$ での $x(t+h)$ との自己相関係数 Cor との間には次の関係がある[5]（注：自己相関係数の定義からは次式は符号が逆であるが，文献[5]に従った）．

$$Cor=\frac{E[(x(t)-x(t-h))(x(t+h)-x(t))]}{E[(x(t+h)-x(t))^2]}$$
$$=2^{2H-1}-1$$

この関係からハースト指数 H は次のようにいえる．

$H>1/2$　過去の変化が未来の変化に継続する傾向がある．例えば，株価が上昇したら，これからも上昇する傾向がある．

$H<1/2$　過去の変化と未来の変化とが逆方向になる傾向がある．例えば，株価が上昇したら，これからは下落する傾向がある．

$H=1/2$　過去の変化と未来の変化は無相関である(ブラウン運動)．

4.5 ハースト指数を求める

4.5.1 ハースト指数の計算に必要なデータ数

ハースト指数を計算するのに必要なデータ数については，循環が数個以上[9]から数千個以上[10]まで諸説がある．必要な個数が多すぎると実績データを得られなくなる．

2000 日の実績データによる $(\log N, \log(R/S))$ のプロットと最小自乗法で近似した直線を描いたのが図 9 であるが，$\log N$ が 2，3，4 のあたりから，プロットは近似直線にほぼ乗っている．これは使用したすべての株価データに当てはまる．log の底は 2 なので，N を少し大きめに取って 100 日間の実績データでハースト指数は得られるとした（注：本文は，事例研究であるので，以下の検証で，100 個で支障がなければ良いとした．何個のデータでハースト指数が得られるかは，文献[9]などに詳しい）．

4.5.2 ハースト指数の時間的変化と平均値

図 10 は横軸に年月日，縦軸に 100 日ごとに計算したハースト指数を取っている．時間経過とともに，変化していることが分かる．

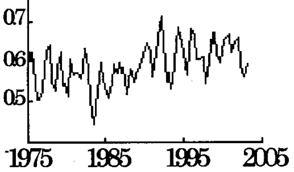

図 10　ハースト指数の時間変化

本事例研究で使うデータのハースト指数は標本数 94,312，平均値 0.6，分散 0.07，歪度 0.01，尖度 −2.9 で平均値を中心に左右対称だが，正規分布（尖度 0）より裾が短い分布をしている．

5．フラクタル分析を用いた誤差率改善の検証

本節 5 では，フラクタル分析を用いて AR モデルの予測精度を改善する方法を検証する．

5.1 改善の概要

フラクタル性を持つ時系列データとハースト指数 H との間には統計的に(2)式の関係があり，時間軸を n 倍する（以下，伸長という）と振幅が n^H 倍に増加し，統計的に自己相似である．なお，自己相似とは細部が全体と相似であることを意味し，コッホ曲線やカントール集合（文献[3]，p. 90）のように人工的に作られたフラクタル図形は厳密な自己相似性を持っている．これに対し，自然界に存在する自己相似性はより緩やかなもの（例えばリアス式海岸における自己相似性）で統計的自己相似と呼ばれる．

図 11 の下段は上段の時間軸を 2 倍に伸長した図である．統計的自己相似性から，ある期間の予測を n 回ではなく半分の $n/2$ 回に分けて行うと図 7 から予測誤差は約半分になることが予想される．振幅については，例えば，$H=0.5$（ブラウン運動）だと振幅は $\sqrt{2}$ 倍になるので，予測誤差は $(1/2)\times\sqrt{2}$ で 70%程度に減少することが予想される．一般的に伸長率を n とし，ハースト指数を H とすると，誤差の改善（以

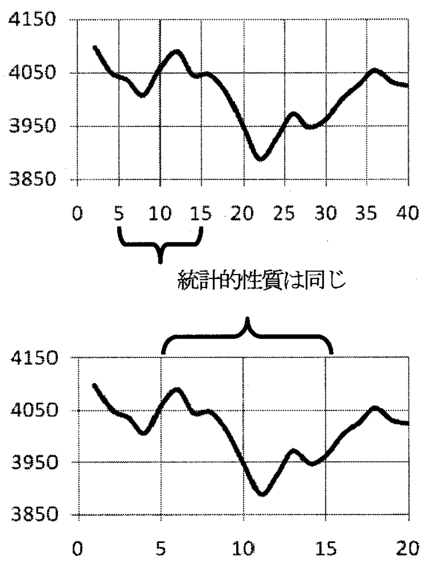

図 11　ハースト指数と時系列データ

下，予測誤差改善率という）は次式(3)に従うことが予想される．

$$(1/n)\times n^{H} \tag{3}$$

この予測誤差改善率の近似式の精度については次節5.2で示す．

図10で見たように，時間の経過とともにハースト指数すなわち統計的自己相似性が変わってくるので，時間軸を伸長しすぎると，ハースト指数が変わり，期待した改善が得られない可能性がある．すなわち，時間軸の伸長には限界がある．どの程度の伸長が良いのかは，実験的に確かめるしかないので，これも次節5.2で確かめる．

5.2 予測誤差改善率の検証

検証のための計算手順を説明する．

i (1)式の $a(m)$ と C とを求める．

ii 実績データの時間を n 倍伸長（図11では $n=2$）して，$a(m)$ と C とを用いて予測をする．

iii 伸長した時点 t の予測値を，元の時間の時点 nt の予測値と読み替える．

iv 予測値と実績データから誤差率を計算する．

図12は100日間の実績データで100日間の予測をした例である．左図は時間軸を伸長していない．右図は時間軸を2倍に伸長して予測を行い，時間軸を元の時間にもどしたときの予測である．

伸長率を変えて誤差率 ε を調べる．表2は伸長率を変えたときの平均誤差率の変化と誤差率の度数分布（列和＝1）の表である．1行目は伸長率，2行目は平均誤差率である．3行目から誤差率の度数分布を比率で表した．伸長率の表現方法は種々考えられるが，ここでは，単純に，2倍，3倍，4倍とした．伸長率の1は「伸長しない」の意味である．伸長率を3倍にすると平均誤差率は0.19程度になり，それ以上伸長してもほとんど改善されない．

株価の平均ハースト指数は，4.5.2節で述べたように0.6である．(3)式で伸長率を n とすると予測誤差改善率は $(1/n)\times n^{0.6}$ 程度と考えられる．表3は1段目が伸長率，2段目が(3)式で計算した予測誤差改善率，

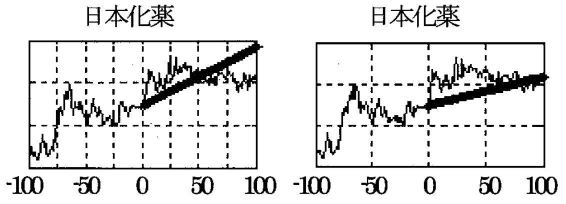

図12 時間軸を伸長する前後の予測

3段目が実績データによる値を示している．伸長率が2のあたりまでは予測誤差改善率どおりで，それ以上になると，若干予測誤差改善率のほうが小さくなる．これは図10のようにハースト指数が時間とともに変わるためである．

表4は伸長率とハースト指数と誤差率の実測データでの関係である．1行目が，伸長率，1列目の2行以降がハースト指数（H）である．各項目の数字は1行目の伸長率と1列目のハースト指数の区間での100日目の平均誤差率である．ハースト指数の差で誤差率は最大50％ぐらい違う．

表5は伸長率とハースト指数と(3)式で計算した予測誤差改善率の関係である．表の構成は表4と同じである．100日間の実績データで100日間の予測値とハースト指数を求め，100日の予測誤差率に(3)式を乗じて予測誤差改善率を求める．この予測誤差改善率を用いて，1行目の伸長率と1列目のハースト指数の区間で

表2 伸長率による誤差率の変化

伸長率	1.00	2.00	3.00	4.00
平均誤差率	0.26	0.20	0.19	0.19
(層別)	度数分布			
$\varepsilon<0.1$	0.28	0.35	0.37	0.38
$0.1<\varepsilon<0.2$	0.23	0.26	0.26	0.27
$0.2<\varepsilon<0.3$	0.17	0.17	0.17	0.17
$0.3<\varepsilon<0.4$	0.11	0.10	0.09	0.09
$0.4<\varepsilon<0.5$	0.07	0.05	0.05	0.04
$0.5<\varepsilon<0.6$	0.05	0.03	0.03	0.02
$0.6<\varepsilon<0.7$	0.03	0.02	0.01	0.01
$0.7<\varepsilon$	0.06	0.02	0.02	0.02

表3 予測誤差改善率の検証

伸長	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00
3式	0.26	0.24	0.22	0.21	0.20	0.18	0.17
実績	0.26	0.23	0.22	0.21	0.20	0.20	0.19

表4 伸長率とハースト指数と誤差率

伸長率	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
$H<0.50$	0.20	0.18	0.17	0.16	0.16
$0.50<H<0.55$	0.23	0.20	0.19	0.18	0.18
$0.55<H<0.60$	0.26	0.22	0.20	0.19	0.19
$0.60<H<0.65$	0.27	0.23	0.21	0.21	0.20
$0.65<H<0.70$	0.30	0.25	0.23	0.22	0.21
$0.70<H$	0.30	0.25	0.23	0.22	0.22

表5　(3)式による誤差率の予測誤差改善率

伸長率	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
$H<0.50$	0.20	0.16	0.14	0.12	0.11
$0.50<H<0.55$	0.23	0.18	0.16	0.15	0.13
$0.55<H<0.60$	0.26	0.21	0.19	0.17	0.16
$0.60<H<0.65$	0.27	0.24	0.21	0.19	0.18
$0.65<H<0.70$	0.30	0.26	0.24	0.22	0.21
$0.70<H$	0.30	0.28	0.26	0.24	0.23

表6　次数と伸長率と誤差率

伸長	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00
3式	0.26	0.24	0.22	0.21	0.20	0.18	0.17
M=1	0.26	0.24	0.22	0.21	0.21	0.20	0.19
M=2	0.26	0.24	0.22	0.21	0.21	0.20	0.19
M=3	0.26	0.24	0.22	0.21	0.21	0.20	0.19
M=4	0.26	0.24	0.22	0.22	0.21	0.20	0.19
M=5	0.27	0.24	0.23	0.22	0.21	0.20	0.19
M=6	0.27	0.24	0.23	0.22	0.21	0.20	0.20

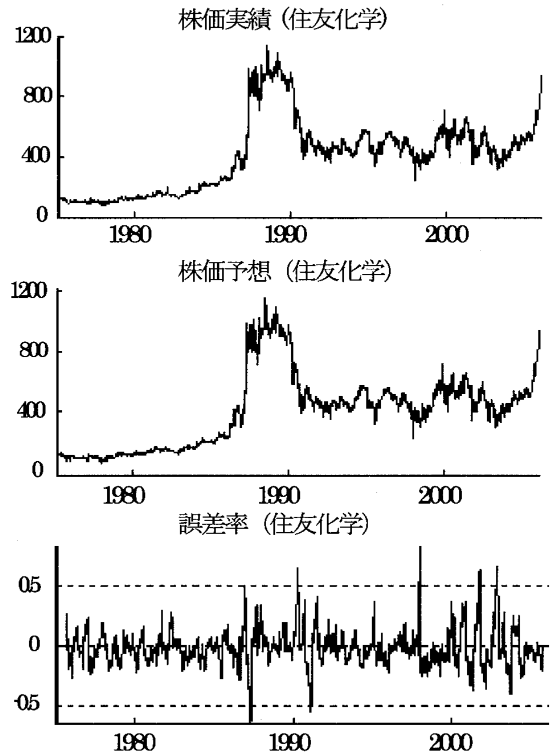

図13　個別企業の実績と予想と誤差率の推移

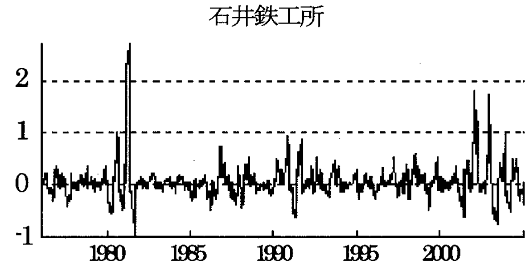

図14　個別の株価での誤差率の推移

の平均値を求める．表4と表5とを比較すると，ハースト指数が小さく，伸長率の大きい場合（表5の右上）を除いて，かなり良い一致をしている．

これまで，3節で述べたように，伸長しない場合の簡単なモデルとして次数を$M=2$とした．伸長した場合の次数Mと誤差率の関係を表6に示した．表1と同じようにMを大きくしても平均誤差率の改善はほとんど見られない．

5.3　個別の株価での様相

これまで，2.2節で述べた117,717個の実績データを用いて，平均的な誤差率の傾向を検証した．ここでは，2,283社の個別企業での誤差率の推移を報告する．2,283社全部について記述することはできないので，全体の傾向をあらわす3例を取り上げる．

100日間の実績データから次の100日間を予測し，これを，順次繰り返し，全期間の予測値を得る．3節と異なり，誤差率は100日目ではなく毎日計算している．また，絶対値ではなく（予測値－実績データ）÷実績データとした．

図13は，上段は株価の実績データ，中段は予測値である．この図の縮尺では，両者の差はわからない．下段に，誤差率の推移を示した．この誤差率の推移は上場期間の長い企業に多く見られるパターンで，大部分の誤差率は0.3以内にあるが，ときどき，0.5ぐらいの誤差率になることがある．

図14は上場期間の長い企業にたまに見られるパターンで誤差率が，1や2になることがある．図15は，上場期間が短い企業に多く見られるパターンで，誤差率は小さい．

2.1節で説明したように上場期間が1000日未満の企業は入っていない．

6.　おわりに

「はじめに」で記したように，計画担当者で，予測モデルに関係者の同意を得ることに苦労されている方は多いと思う．他方，ARモデルは次数を増やしても，早く定常状態になるために，図5のように予測の直線を引いただけに見えて，半年も先の需要予測や株価予想にはとても使えないと思いがちである．ところが，実際に，株価で検証してみると，意外と精度が良く，

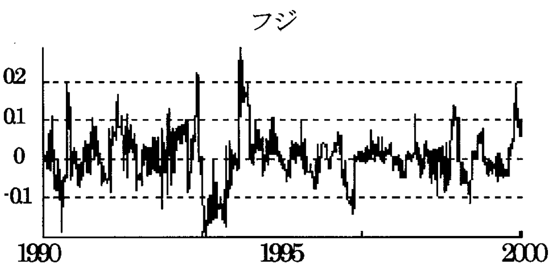

図15　個別の株価での誤差率の推移

下手な予測モデルより良い場合もあることが分かった．そこで統計や計量経済学の文献を調べたが，ARモデルの限界や問題点や予測誤差推定式などは書かれているが，実証的に，どの程度の精度が出るかを記載している文献は見つからなかった．これが本事例研究を始めた理由である．

データとしては株価を使ったが，季節変動がない点を除くと，需要などの経済時系列データと比較して，複雑で，かつ，多くのパターンを含んでいる．実際，経済統計年鑑[11]や企業の売り上げデータから季節変動を除いてARモデルを適用して誤差率を調べると株価の場合より良い予測精度になる．

まず，ARモデルの次数と平均誤差率との関係を調べ，次数の影響はほとんどないことを確認した．次いでARモデルによる予測を簡単に改善する方法として，予測時間を伸長する方法の実証例を報告した．表3には100日目の予測値と実測データによる平均誤差率を示したが，100時点先の予測という非常に困難な予測問題にも，そこそこに対応できることを大量(2,283社)のデータから検証することができた．

予測を簡単に改善する方法として用いた，予測の回数を減らす手法は，池田・時永が多くのシミュレーション結果を用いて予測の近似式をつくり株価その他で有効性を実証している[12]．本事例研究でも大変参考にさせていただき，より簡明な予測手順を示すことができたと考えている．

本事例研究では，(2)式から，予測誤差改善率を示す(3)式を導き，表4，5，6，で(3)式を実績データで検証し，この演繹が正しいことを示した．これは著者らの知る限りでは，新しい提案である．また，5節でハースト指数で予測誤差の目安が得られることを示した．(2)式と合わせて，簡単な回帰モデルであるARモデルでも，予測誤差の目安が得られるので実用上の使い勝手はよくなった．例えば，予測誤差の推定が重要な株売買の損切りの判断などにも使えると思われる．また，この結果は，フラクタル分析を経済時系列予測に実用的に応用するのに役立つ．

参考文献

[1] 尾崎統, 北川源四郎編,『統計科学選書5　時系列解析の方法』, 朝倉書店, 1998.

[2] 山澤成康 (2004),『実戦計量経済学入門』, 日本評論社, 2004.

[3] 熊谷善彰,『金融時系列データのフラクタル分析』, 多賀出版, 2000.

[4] L. Trigeorgis, *Real Options*, The MIT Press, 1996.

[5] 新田功, 大滝厚ほか,『経済・経営時系列分析』, 白桃社, 2001.

[6] 松葉育雄,『長期記憶過程の統計』, 共立出版, 2007.

[7] 樋口知之,「時系列のフラクタル分析」,『統計数理』, 第37巻, 第2号 (1989), 209-232.

[8] E. E. Peter, *CHAOS AND ORDER IN CAPITAL MARKETS A New View of Cycles, Price, and Market Volatility*, John Wiley & Sons, 1991. 新田功訳,『カオスと資本市場』, 白桃社, 1994.

[9] J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, 1988. 松下貢ほか訳,『フラクタル』, 啓学出版, 1991.

[10] H. E. Hurst, "Long term storage capacity of reservoirs," *Transaction of the American Society of Civil Engineering*, 116, 770-808, 1965.

[11]『経済統計年鑑 2005』, 東洋経済新報社, 2005.

[12] 池田欽一, 時永祥三,「フラクタル時系列の予測手法を用いた株価の予想とその応用」, *Journal of Operations Research Society of Japan*, Vol. 42, No. 1, 18-30, 1999.