論文・事例研究

オプションモデル価格の市場価格や実現株価との整合性に関する検証

田中健太郎，宮﨑　浩一，岡本　雅生

1.　はじめに

オプションとは，満期日において対象資産（以下，原資産，株式などを想定されたい）を取り決めた価格（以下，権利行使価格）で買う（コール・オプション）または売る（プット・オプション）ことができる権利のことである．オプション市場において，この権利（オプション）が売買されている．商品特性からコール・オプションの価格は，満期日に原資産が権利行使価格よりも高くなる可能性が大きいと想定される場合に高くなり，逆の場合には安くなる．プット・オプションに関しても同様に考えられる．つまり，オプションの市場価格データには，市場参加者の想定する将来の原資産価格に関する情報が含まれていると考えられる．

オプション価格に内在するリスク中立分布（インプライドリスク中立分布）を抽出する研究の起源は，Breeden and Litzenberger（1978）[1]に遡り，以降，ツリーモデルや様々な分布形を仮定したインプライドリスク中立分布の抽出やその形状に表れる投資家の相場観に関する研究が盛んに行われてきた．数多くある文献の中からごく一部を挙げると，Rubinstein（1994）[2]，Buchen and Kelly（1996）[3]，Jackwerth and M. Rubinstein（1996）[4]，Nomura and Miyazaki（2006）[5]などがある．近年では，オプションから抽出したインプライドリスク中立分布のみならず，投資家のリスク回避度も考慮したうえでオプション市場価格に含まれる投資家の相場観情報が研究されており，このような先行研究に Bliss and Panigirtzoglou（2004）[6]，Liu et al.（2007）[7]がある．本研究では，インプライドリスク中立分布としてパラメトリックモデルを採用した Liu et al.（2007）に焦点を当てる．

そこでは，インプライドリスク中立分布の分布形を混合対数正規分布と一般化ベータ分布の2通りでパラメトライズしたうえでオプション市場価格から推定し，このインプライドリスク中立分布の整合性について，オプション満期における実現株価に基づいて計量している．また，ヒストリカル分布に関しては，正規分布を仮定し平均と分散を ARCH モデルから推定した分布の実現株価に対する整合性を同様に計量している．さらに，抽出したインプライドリスク中立分布に市場参加者のリスク回避度を考慮したリアル分布を導入して，そのリスク回避度（全期間で一定と仮定）を全期間におけるインプライドリスク中立分布（オプションの満期の数だけ得られる）と対応する満期時点の実現株価から，対数尤度を最大化することによって推定している．

本研究では，Liu et al.（2007）とは違い，オプションを価格付けする時点までに観測可能な株価データから推定されるヒストリカル分布をある種の事前分布と想定し，それをオプション市場参加者が自らの相場観に基づいて修正したいわば事後分布に相当するものとしてインプライドリスク中立分布を捉える．よって，ヒストリカル分布もインプライドリスク中立分布と同じ分布形を想定し，対数尤度に基づく実現株価との整合性がこれらの分布でどの程度異なるかについて検証する．分布形としては，分析対象期間に市場が混乱したサブプライム問題発生後の時期も含まれるため，原資産がジャンプするような動きも捉えることが可能なジャンプ拡散モデルの分布形も導入する．そして，オプション市場価格へのオーバー・フィッティングの問題も議論可能なように単純な対数正規分布（BS モデル）も採用する．また，リアル分布に関しても，先行研究の検証のみならず，過去のインプライドリスク中立分布と対応する満期の株価から推定されたリスク回

たなか　けんたろう，みやざき　こういち，おかもと　まさき
電気通信大学 電気通信学研究科
〒182-8585 調布市調布ヶ丘 1-5-1
受付 08.7.28　採択 09.5.25

避度（インサンプルデータから得られたもの）を現時点のインプライドリスク中立分布をリアル分布への変換する際に利用して，インプライドリスク中立分布やヒストリカル分布の場合と同様にアウトサンプルデータに基づいてリアル分布を計量し，これらの分布の実現株価に対する整合性を比較検討する．

本論文の構成は，以下の通り．次節では，4種類の株価モデルの分布形を導入する．3節では，分析対象と分析手法について述べ，4節では実証分析結果とその考察を与える．最終節では，まとめと結語を付す．

2. 株価モデル

ここでは，本研究で用いる4通りの株価モデルの分布形を示す．各分布形のパラメータセットを θ で表現する．インプライドリスク中立分布ではこのパラメータセット θ をオプション市場価格から，ヒストリカル分布では過去の株価データから推定する．

2.1 Black-Scholes モデル（BS モデル）

BS モデル[8]は，株価 S_t が幾何ブラウン運動に従うと仮定したモデルで，時刻 T における株価は $S_T=S_0\exp((\mu-0.5\sigma^2)T+\sigma W_T)$ となる．ここで S_T はオプションの満期時点における株価，S_0 は初期時点における株価，μ は期待リターン，σ はボラティリティ，W_T は標準ブラウン運動を表す．このことから，対数株価リターン $\ln(S_t/S_0)$ は正規分布に従うため，満期時点の株価 S_T は式(1)の対数正規分布（$\theta=(\mu,\sigma)$）に従う．

確率密度関数

$$g_{BS}(S_T|\theta)$$

$$=\frac{1}{S_T\sigma\sqrt{2\pi T}}\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln S_T-(\ln S_0+\mu T-0.5\sigma^2 T)}{\sigma\sqrt{T}}\right]^2\right) \quad (1)$$

2.2 混合対数正規モデル（MLN モデル）

MLN モデル[9]は，満期時点の株価が複数個（本研究では2個）の対数正規分布を組み合わせた分布に従うようにBSモデルを拡張したモデルである．本モデルのパラメータセット θ は，各対数正規分布の平均 $F_i(i=1,2)$，ボラティリティ $\sigma_i(i=1,2)$，ウェイト w の5つであり，$\theta=(F_1,F_2,\sigma_1,\sigma_2,w)$ となる．

確率密度関数

$$g_{MLN}(S_T|\theta)=wg_{LN}(S_T|F_1,\sigma_1,T)+(1-w)g_{LN}(S_T|F_2,\sigma_2,T) \quad (2)$$

$$g_{LN}(S_T|F_i,\sigma_i,T)$$

$$=\frac{1}{S_T\sigma_i\sqrt{2\pi T}}\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln S_T-[\ln F_i-0.5\sigma_i^2 T]}{\sigma_i\sqrt{T}}\right]^2\right) \quad (3)$$

2.3 ジャンプ拡散モデル（JD モデル）

JD モデル[10]は，株価のダイナミックスを幾何ブラウン運動にジャンプを加えてBSモデルを拡張したモデルであり株価を $dS_t/S_t=(\mu-\lambda\beta)dt+\sigma dW_t+(Y-1)dN_t$ によってモデル化する．ここで β はジャンプ幅率の期待値，Y はジャンプ幅率の確率変数，N_t はインテンシティを λ とするポアソン過程を表す確率変数，σ は拡散項のボラティリティである．本研究では Merton（1976）に従い，ジャンプ幅率の確率変数 Y の対数を取ったものが平均 μ_J，分散 δ^2 の正規分布に従うと仮定する．このとき，満期における株価の従う確率密度関数（$\theta=(\mu,\lambda,\beta,\delta,\sigma)$）は，式(4)で与えられる．

確率密度関数

$$g_{JD}(S_T|\theta)$$

$$=\frac{\exp(-\lambda T)}{S_T}\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^k\exp\left(-\frac{(\ln S_T-\ln S_0-\phi T-k\mu_J)^2}{2(\sigma^2T+k\delta^2)}\right)}{k!\sqrt{2\pi(\sigma^2T+k\delta^2)}} \quad (4)$$

ここで，k はジャンプ回数を表す．

$$\phi=\mu-0.5\sigma^2-\lambda\beta \quad (5)$$

2.4 一般化ベータモデル（GB 2 モデル）

GB 2 モデル[11]は，ベータ分布（2つのパラメータを用いて $f(x|p,q)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}/B(p,q), 0\leq x\leq 1$ と表される．ここで，$B(p,q)$ はベータ関数（式(7)である）を確率変数の上限が1となる制約を外す形で拡張されたモデルである．GB 2 モデルは，パラメータセット $\theta=(a,b,p,q)$ を持ち，これらのパラメータの組み合わせで平均，分散，歪度，尖度が決まる．

確率密度関数

$$g_{GB2}(S_T|\theta)=\frac{aS_T^{ap-1}}{b^{ap}B(p,q)[1+(S_T/b)^a]^{p+q}} \quad (6)$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (7)$$

3. 分析対象と分析手法

3.1 分析対象

分析対象は，大きく次の2つに分けられる．第一に，オプションモデル価格とオプション市場価格との整合性に関する検証（分析対象1）である．第二に，同一

の株価モデルにおいても推定手法や推定に用いるデータが異なれば，推定された株価分布と実現株価との整合性にどの程度の差異が見られるかに関する検証（分析対象2）である．

分析対象1においては，2節で導入した4つの株価モデルから導かれる4つのオプションモデル価格のオプション市場価格との整合性について比較分析を行う．その際には，この整合性がオプションの満期や株式市場の環境によってどのような影響を受けるかについても検討する（分析結果と考察は，4.2.1節を参照）．

分析対象2において，同一の株価モデルにおいて推定手法や推定に用いるデータが異なることにより得られる株価モデルの分布としては，「1．はじめに」において述べたインプライドリスク中立分布，ヒストリカル分布，リアル分布を想定している．ここで，このような分布を採用して実現株価との整合性を検討することの意味づけを整理しておく．記法を簡便にするため，株価モデルとして2.1節のBSモデルを代表として採り上げ説明するが他のモデルでも同様である．

推定手法や推定に用いるデータが異なることによって得られる株価モデルの分布を生成する確率過程として，確率過程A～Dを導入する．これらの確率過程における関係を図1に示した．図1にあるように，これらの確率過程は，株価モデルの分布を推定する際にオプション市場価格データを利用するかどうか（利用するのは確率過程A，B），投資家が株価のドリフトを無リスク金利程度であると見込んでいる（投資家がリスク中立）かどうか（見込んでいると想定するのは確率過程A，D）によって位置づけられる．

オプション市場価格データを利用せずに推定された株価モデルの分布を生成する確率過程C，Dは，過去の株価をデータとして採用して，最尤法に基づき推定される株価モデルの分布に対応するものであり，ヒストリカル分布と呼ぶ（推定手法は3.2.3節を参照）．確率過程Dは投資家がリスク中立であることを想定した株価モデルの分布を表現したものであり，ドリフトを無リスク金利に制約している．

オプション市場価格データを利用して推定された株価モデルの分布のことをインプライドリスク中立分布と呼ぶ（推定手法は3.2.1節を参照）．インプライドリスク中立分布を生成する確率過程が確率過程Aである．投資家がリスク中立でないならば，$dW_t^Q \neq dW_t$であり，確率過程Aが生成する株価モデルの分布は現実の測度の下での分布と異なるが，投資家がリスク中立である場合を想定すれば，確率過程Aが生成する株価モデルの分布を現実の測度の下での分布として捉えることができる．先に見た確率過程Dが生成する株価モデルの分布との相違点は，拡散項（BS以外のモデルでは二次以上のモーメント）にある．ドリフト項（一次モーメント）は共に無リスク金利に一致しているが，確率過程Aにおけるオプション市場価格データを利用して推定された株価モデルの分布の標準偏差（σ_{IV}，他のモデルでは高次モーメントも含む）は，過去の株価から推定された確率過程Dにおける標準偏差（σ_{HV}）と異なる点が重要である．

投資家がリスク中立でない場合には，インプライドリスク中立分布を生成する確率過程Aにおいて$dW_t^Q \neq dW_t$であるから，実現株価との整合性を検証するためには投資家のリスク回避係数を導入したうえでリスク中立測度の下でのインプライドリスク中立分布を通常の確率測度の下での株価モデルの分布へと変換する必要がある．この変換によって得られる分布をリアル分布と呼ぶ（推定手法は3.2.2節を参照）．リアル分布を生成する確率過程が確率過程Bである．先に見た確率過程Aと確率過程Dの相違点が株価モデルの分布の標準偏差のみ（他の株価モデルでは高次モーメントも含む）であったのに対して，確率過程Bと確率過程Cの相違点が株価モデルの分布の期待値と標準偏差の両方となることを認識しておく必要がある．

実証分析においては，確率過程A，C，Dの間で，各確率過程が生成する株価モデルの分布と実現株価との整合性を対数尤度に基づいて直接的に比較する（分析結果と考察は，4.2.2節を参照）．確率過程Bが生成するリアル分布に関しては，先行研究においてはリスク回避度を事後的に全期間の実現株価に基づいて推

投資家の想定する株価モデルのドリフト

ボラティリティの種類	r	μ
インプライドボラティリティ（オプション）	確率過程A $\frac{dS_t}{S_t}=rdt+\sigma_{IV}dW_t^Q$	確率過程B $\frac{dS_t}{S_t}=\mu^*(\gamma)dt+\sigma_{IV}dW_t$
ヒストリカルボラティリティ（過去の株価）	確率過程D $\frac{dS_t}{S_t}=rdt+\sigma_{HV}dW_t$	確率過程C $\frac{dS_t}{S_t}=\mu dt+\sigma_{HV}dW_t$

図1　本研究における分析対象

定しているために，確率過程Aが生成する株価モデルの分布よりも実現株価との整合性が当然ながら良くなることが示されている．ここでは，リスク回避度を推定する際に利用する実現株価をインプライドリスク中立分布の推定時点までと現実的な設定とした場合に，確率過程A，Bが生成する株価モデルの分布の整合性を比較することを分析対象とする（分析結果と考察は，4.2.3節を参照）．

3.2節にインプライドリスク中立分布，リアル分布，ヒストリカル分布の具体的な導出法と分析手法について述べる．

3.2 分析手法

3.2.1 インプライドリスク中立分布の抽出法

インプライドリスク中立分布のパラメータセット θ は，2節で述べた株価モデルに基づくオプション価格 $(C(K_i|\theta, r, T), P(K_i|\theta, r, T))$ と対応するオプション市場価格 $(C_{market}(K_i), P_{market}(K_i))$ との差の2乗和を最小化することにより推定する．この差の2乗和が小さいほど，モデルのオプション価格がオプション市場価格へのフィットが良いことを表している．最小化の対象となる目的関数は，式(8)で与えられる．また K_i は権利行使価格を表し，$i=1$ でアットザマネー（以下ATM）オプションの権利行使価格，$i=2$ でアウトオブザマネー（以下OTM）1の権利行使価格，$i=3$ でOTM 2の権利行使価格，以下同様に各オプションの権利行使価格を示す．

$$\frac{1}{N+M}\{\sum_{i=1}^{N}(C_{market}(K_i)-C(K_i|\theta, r, T))^2 + \sum_{i=1}^{M}(P_{market}(K_i)-P(K_i|\theta, r, T))^2\} \tag{8}$$

またインプライドリスク中立分布を推定する際には，投資家の効用がリスク中立を満たす必要がある．つまり推定する株価分布の期待値を無リスク金利で運用した株価と一致させなければならない $(E[S_T]=S_0e^{rT})$．以下に各株価モデルの制約条件を示す．

$$\text{BS モデル}：\mu=r \tag{9}$$

$$\text{MLN モデル}：wF_1+(1-w)F_2=S_0\exp(rT) \tag{10}$$

$$\text{JD モデル}：\mu=r \tag{11}$$

$$\text{GB 2 モデル}：\frac{bB(p+1/a, q-1/a)}{B(p, q)}=S_0\exp(rT) \tag{12}$$

3.2.2 リアル分布の導出手法と実現株価との整合性の検証法

投資家は必ずしもリスク中立的ではないので，投資家が本来的に想定する株価分布は，彼等のリスク回避度に依存するものである．よって，この株価分布は，インプライドリスク中立分布をベースにしてリスク回避度の影響を考慮した分布であり，これをリアル分布と呼ぶ．本研究では，リアル分布を導く際の効用関数 $U(x)$ としてベキ型 $x^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ を仮定する．ここで γ はリスク回避度である．リアル分布 $\tilde{g}(x)$ は，インプライドリスク中立分布 $g(x)$ と，$U(x)$ を一階微分した限界効用関数 $U'(x)$ を用いて式(13)のように表せる．JDモデルのリアル分布に関する表現は，先行研究で取り扱われていないため付録に記す．

$$\tilde{g}(x)=\frac{g(x)/U'(x)}{\int_0^\infty g(y)/U'(y)dy}=\frac{x^\gamma g(x)}{\int_0^\infty y^\gamma g(y)dy} \tag{13}$$

先行研究[7]では，リアル分布を推定する際のリスク回避度 γ を，推定期間を通して一定と仮定している．加えて，オプション市場の投資家が合理的であると仮定し，投資家の推定するオプションの満期時点における株価のリアル分布が満期時点の実現株価と最も整合的となるようにリスク回避度を推定している．具体的には，分析期間におけるすべてのオプションの満期時点 $i, (i=1, \cdots, n)$ におけるインプライドリスク中立分布（パラメータセット θ_i は推定済み）と未知パラメータであるリスク回避度から構成されるリアル分布 $\tilde{g}(x|\theta_i, \gamma)$ と実現株価 $S_{T,i}$ を用いて得られる対数尤度関数（式(14)）を最大化することにより，γ を推定してリアル分布を導出する．この場合，対数尤度に基づくリアル分布の実現株価に対する整合性は原理的に必ずインプライドリスク中立分布の整合性に勝ることとなる．このため，先行研究のリアル分布に関する整合性の分析は不適切といわざるを得ない．

$$\ln(L(S_{T,1}, S_{T,2}, \cdots, S_{T,n}|\gamma))=\sum_{i=1}^{n}\ln(\tilde{g}(S_{T,i}|\theta_i,\gamma)) \tag{14}$$

そこで本研究では，現時点から適切な期間だけ遡った（ここでは，10期間，20期間，30期間を採用する）インプライドリスク中立分布と実現株価を用いて，先と同様にリスク回避度を推定する．得られたリスク回避度を利用して，現時点の次に満期を迎えるインプライドリスク中立分布をリアル分布に変換する．同様の手順を逐次繰り返せば，リアル分布を導出する時点までに利用可能な情報のみを用いてリアル分布を導出することができる．このように導出されたリアル分布と実現株価に基づいて対数尤度（この場合，式(14)のリスク回避度は推定済みでありかつオプションの満期 i に依存したものとなっている）を求めれば，リアル分

布の整合性を先に求めたインプライドリスク中立分布や次節で導出するヒストリカル分布の整合性と比較することに意義が出てくる．

3.2.3　ヒストリカル分布の導出法

ヒストリカル分布は，将来の株価リターンの分布が現時点から適切な期間だけ遡った（ここでは，40期間を採用する）時点までの株価をサンプリングして得られる株価リターンの分布に従うと仮定し導出する．株価のサンプリング間隔は，現時点から推定対象となる満期までの営業日数（$T(T=5, 10, 20)$）に合わせる．このようにして得られた株価リターンの実現値を$R_{T,i,j}$とする．ここでiは遡る期間（$i=1, \cdots, n$, ここでnは40），jは推定する満期を表す（$j=1, \cdots, m$, ここでmは59）．この$R_{T,i,j}$と満期jに対応する時点0における株価$S_{0,j}$を用いてT営業日後の株価$S_{T,i,j}$は$S_{T,i,j}=S_{0,j}\exp(R_{T,i,j})$と与えられる．この株価$S_{T,i,j}$を利用して，最尤法により各モデルに関するヒストリカル分布を推定する．

3.1節での確率過程Dにあたる，ドリフトを無リスク金利rで推定するヒストリカル分布は，式(9)から式(12)の制約条件を加えることにより推定を行う．

4.　実証分析

4.1　データ

分析に用いるオプションデータは，2003年6月から2008年4月までの各月に満期を迎える日経225コール・オプションとプット・オプションである．分析対象となるオプションの残存期間が5営業日，10営業日，20営業日であるため，各月の満期から，5営業日，10営業日，20営業日遡った時点におけるオプション価格を用いる．実際には，観測可能なオプションが少ないため，それらの価格から逆算したインプライド・ボラティリティをスプライン補間して様々な権利行使価格（ATMを中心に5営業日は30円刻み，10営業日は40円刻み，20営業日は60円刻みとし，プット・オプションとコール・オプションのATM, OTM 1～OTM 24の計25個ずつ合計50個）に対応するインプライド・ボラティリティを求め，そこからBSモデルを用いて導出した様々な権利行使価格に対応するオプションの価格を利用する．

ヒストリカル分布を推定する際には，2000年2月から2008年4月までの日経225 index終値を採用し，40期間の株価リターンデータを用いて推定を行った．また尤度関数の評価に用いる実現株価は特別清算指数（Special Quotation）を採用した．なお本研究における分析対象期間はゼロ金利政策下であったことや無担保コール翌日物がほぼ0に等しかったため，無リスク金利rは0と設定した．また無リスク金利を0.5%とした実証も行ったが，本研究においてはほぼ影響を受けない結果となった．図2には，上記の期間における日経225 indexの推移を示した．

実証分析は，リアル分布の実現株価の整合性の分析を除き（データ数の制約のため），上記の期間を市場が安定していた期間である2003年6月から2005年5月の24期間（“安定期”と呼ぶ）と市場が上昇傾向にある2005年6月から2007年8月の27期間（“上昇期”と呼ぶ）とサブプライム問題発生以後の市場が混乱していた2007年9月から2008年4月の8期間（“混乱期”と呼ぶ）に分割し，これらの期間を対象とした分析を試みる．なおこれらの期間での日経225 indexの時系列の性質が変化したことが考えられるのでボラティリティの変化の検定（F検定）の結果を表1，表2に示す．それぞれP値が0.01よりも小さく

図2　日経225 index ヒストリカルデータ

表1　F検定結果（安定期から上昇期への変化）

	安定期	上昇期
平均	0.069%	0.081%
分散	0.015%	0.012%
観測数	492	555
自由度	491	554
観測された分散比	1.273	
P(F<=f) 片側	0.003	
F 境界値 片側	1.155	

表2　F検定結果（上昇期から混乱期への変化）

	上昇期	混乱期
平均	0.081%	−0.157%
分散	0.012%	0.034%
観測数	555	166
自由度	554	165
観測された分散比	2.934	
P(F<=f) 片側	0.000	
F 境界値 片側	1.222	

なっており，ボラティリティの性質が変わっていることを示している．また日経ヴェリタスonlineでは2007年8月におきたBNPパリバ・ショックを以下のように記述している．「今回の金融危機が起こる発端になったといわれる出来事．2007年8月9日に仏大手銀のBNPパリバが同行傘下のミューチュアル・ファンドの解約凍結を発表．市場でサブプライムローン関連の金融商品の買い手がつかず，解約に対応するための現金化が困難になった．それまでサブプライム関連商品を積極的に購入していた欧米の投資家が動揺し，信用不安が台頭した（2008年11月2日）」．このことから本研究においてサブプライム問題発生を2007年8月とし，これ以降を混乱期と定義した．

4.2 分析結果と考察

4.2.1 オプション市場価格との整合性

安定期におけるオプションモデル価格とオプション市場価格との絶対誤差の平均を表3に，上昇期におけるものを表4に，混乱期におけるものを表5に示した．表3～5から，MLN，JD，GB2モデルのオプション市場価格との整合性がBSモデルよりも取れていることがわかる．これはBS以外の3つのモデルが，投資家の想定するインプライドリスク中立分布における歪度，尖度などの高次モーメントの影響を捉えることができたためであると考えられる．より詳細に見ると，安定期，上昇期においては整合性が良い順に，MLN，JD，GB2モデルとなることがわかる．

混乱期では，いずれのモデルに関してもオプション市場価格との価格誤差は絶対値ベースで安定期よりも悪くなるが，特に，BSモデルの価格誤差が極めて大きくなっている．他のモデルの市場価格との整合性は，BSモデルとの比較において相対的には安定期や上昇期よりも優れている．いずれの残存期間においても総じて整合性が良好なモデルはJDモデルである．JDモデルは原資産プロセスにジャンプを加えたモデルである．混乱期にしばしば見られる株価が上下に大きくジャンプするような動きがインプライドリスク中立分布にも反映されており，JDモデルはこれを捉えることができたのではないかと考えられる．

また表6にFTSE 100 indexを原資産とするオプション市場価格と先行研究Liu et al.（2007）において用いた株価モデルに基づくオプション価格との価格誤差を示した．英国では，GB2モデルを用いてオプション価格を抽出したほうが，誤差が小さいことが分かる．日本市場においてはGB2モデルよりもMLNモデルのフィッティング精度が高い．先行研究では，分析対象期間が1993年7月から2003年12月であり，分析対象期間は異なるが，日英のオプション市場において，適切な株価モデルが異なることが分かる．

4.2.2 インプライドリスク中立分布とヒストリカル分布の実現株価との整合性

安定期における実現株価に対する整合性を比較するために，インプライドリスク中立分布とヒストリカル分布の対数尤度（安定期）を（上昇期に観測数をそろえるため）27/24倍したもの表7に示した．まず，ヒストリカルrとヒストリカルμの対数尤度を比較すると，わずかながらドリフトを無リスク金利rに固定したヒストリカル分布の対数尤度が大きいことが分かる．安定期においては株価に明確なトレンドは見ら

表3 価格誤差 安定期

残存期間	BS	MLN	JD	GB2
5営業日	1.58	0.25	0.36	0.95
10営業日	2.75	0.36	0.77	1.18
20営業日	2.66	0.71	0.88	0.95

表4 価格誤差 上昇期

残存期間	BS	MLN	JD	GB2
5営業日	3.41	0.30	0.56	1.14
10営業日	4.82	0.95	1.02	1.41
20営業日	6.59	1.53	1.73	1.88

表5 価格誤差 混乱期

残存期間	BS	MLN	JD	GB2
5営業日	14.61	0.77	1.59	3.29
10営業日	14.65	3.38	1.67	2.77
20営業日	40.43	2.48	1.87	4.16

表6 価格誤差 FTSE 100 index

残存期間	MLN	GB2
20営業日	1.32	1.14

表7 対数尤度（安定期）

残存期間	分布	BS	MLN	JD	GB2
5営業日	リスク中立	−190.77	−192.85	−192.79	−191.39
	ヒストリカルr	−190.27	−191.09	−192.44	−190.40
	ヒストリカルμ	−191.08	−193.19	−191.65	−191.72
10営業日	リスク中立	−203.88	−203.20	−202.80	−204.30
	ヒストリカルr	−204.00	−202.96	−202.32	−204.18
	ヒストリカルμ	−205.38	−209.42	−203.30	−202.38
20営業日	リスク中立	−213.82	−213.42	−212.36	−213.38
	ヒストリカルr	−212.34	−217.67	−213.22	−212.10
	ヒストリカルμ	−213.94	−221.81	−213.74	−214.28

れないため，株価モデルのドリフトに自由度を与えて推定を行っても将来の実現株価との整合性を向上させることに結びつかないことがわかる．

インプライドリスク中立分布とドリフトを r に固定したヒストリカル分布との対数尤度の比較においても，ほとんど差がないことが分かる．株価にトレンドの発生が確認されない時期においては，投資家の市場の方向性に対する見通しがインプライドリスク中立分布にあまり織り込まれないことが分かる．

次に上昇期における実現株価に対する整合性を比較するために，インプライドリスク中立分布とヒストリカル分布の対数尤度（上昇期）を表8に示した．ヒストリカル r とヒストリカル μ を比較すると，5，10 営業日においてはドリフトを μ に固定したものの対数尤度が小さくなるといった傾向がある．これは，“上昇期”は株価が上昇した期間ではあるが，SQ値と5(10)営業日前の株価を比較すると27期間中15(11)期間も株価が下落しているためである．このことから，株価リターンの計測期間が5(10)営業日のように短い場合には，トレンドによる影響よりもSQ値のようなテクニカルな要因の影響の方が強く表れることがわかる．残存期間が20営業日まで長くなると，対数尤度はヒストリカル μ モデルの方がヒストリカル r モデルよりも大きくなる．これは，残存期間が長くなるに従って，株価モデルと将来の実現株価との整合性における株価モデルのドリフトによる影響の重要性が高まったためであると考えられる．

また，上昇期においては，インプライドリスク中立分布の対数尤度が両ヒストリカル分布の対数尤度を上回っている．特に，5，10 営業日において両者の差が大きい．これは残存期間が短いほど，オプション市場参加者の相場観の影響が強く現れているためだと考える．逆に残存期間が長くなるほどヒストリカル分布から大きくかけはなれるような強い相場観をオプション市場参加者が持ちにくかったのではないかと考える．

インプライドリスク中立分布についてより詳細に見ると，5，20 営業日の MLN，JD，GB 2 モデルの対数尤度が BS モデルの対数尤度よりも大きい．このことからオプション市場価格から導出されるインプライドリスク中立分布における歪度，尖度などの高次モーメントが実現株価に対する整合性をいくらか高める要因になっていることが分かる．よって，上昇期においては，オプション市場価格へのフィッティングを高めるようなモデル化が，同時に，おおむね実現株価の整合性も向上させることになる．

混乱期における実現株価に対する整合性を比較するために，インプライドリスク中立分布とヒストリカル分布の対数尤度（混乱期）を（観測数をそろえるため）27/8倍したものを表9に示した．安定期，上昇期との比較では，インプライドリスク中立分布，ヒストリカル分布を問わず対数尤度は小さくなっており，実現株価に対する整合性は大きく劣る．混乱期は，サブプライム問題のため株価が大きく落ち込んだ時期であり，この株価の動きを捉えることは難しかったことが伺える．

また，混乱期においては，インプライドリスク中立分布の対数尤度がヒストリカル分布の対数尤度よりも概して小さい．このことから，混乱期においては市場参加者の相場観はそれほど的確ではないために，ヒストリカル分布にある種のノイズを加えたような形でインプライドリスク中立分布（オプション市場価格）を与えていると想定される．より詳細に見ると，5，10 営業日において MLN，JD，GB 2 モデルを採用したインプライドリスク中立分布の対数尤度が，BS モデルの対数尤度よりも小さい．これは，混乱期においては，オプション市場価格へのフィッティングを高めるような高次モーメントを柔軟に与えることが可能なモデル化は，オプション市場価格のノイズ部分を抽出するような状況を招くことになり，実現株価に対する整合性を低下させるものと考えられる．しかし，残存期

表8　対数尤度（上昇期）

残存期間	分布	BS	MLN	JD	GB2
5営業日	リスク中立	−195.67	−194.89	−194.76	−194.07
	ヒストリカルr	−197.49	−198.37	−200.70	−197.53
	ヒストリカルμ	−199.51	−202.94	−200.65	−199.58
10営業日	リスク中立	−204.03	−204.24	−204.25	−204.05
	ヒストリカルr	−207.52	−206.60	−211.34	−206.79
	ヒストリカルμ	−208.86	−216.37	−208.82	−210.56
20営業日	リスク中立	−217.08	−215.78	−215.26	−215.63
	ヒストリカルr	−217.18	−221.72	−216.85	−217.01
	ヒストリカルμ	−217.73	−221.24	−214.38	−217.56

表9　対数尤度（混乱期）

残存期間	分布	BS	MLN	JD	GB2
5営業日	リスク中立	−201.19	−212.47	−210.60	−208.43
	ヒストリカルr	−203.55	−205.15	−203.45	−202.23
	ヒストリカルμ	−201.29	−203.75	−202.50	−202.33
10営業日	リスク中立	−217.93	−220.78	−221.77	−221.17
	ヒストリカルr	−217.96	−212.95	−217.41	−216.15
	ヒストリカルμ	−217.54	−216.18	−217.05	−216.54
20営業日	リスク中立	−235.99	−232.28	−233.76	−235.87
	ヒストリカルr	−238.34	−272.01	−239.42	−236.23
	ヒストリカルμ	−241.83	−354.62	−240.25	−238.48

間が20営業日まで長くなると，MLN，JD，GB2モデルがBSモデルの整合性を上回る．これは残存期間が長くなるにつれて，ノイズの影響が相対的に小さくなるためであると考えられる．

次に表10に分析対象期間を通して算出した対数尤度（日本）を（先行研究と観測数を同じにするため）126/59倍したものを示した．そして表11は，英国株式市場を対象とした先行研究Liu et al. (2007) において導出したインプライドリスク中立分布とARCHモデルから導出したヒストリカル分布の対数尤度を示したものである．先行研究ではヒストリカル分布に正規分布を仮定し，ARCHモデルを用いて株価のドリフトとボラティリティを推定している．これはヒストリカルμのモデルにあたる．

残存期間は20営業日と同じだが株価水準や分析対象期間が異なるため，先行研究の英国株式市場における分析結果と本研究の日本株式市場における分析結果を単純に比較するわけにはいかないが，日本株式市場に比べ英国株式市場の対数尤度の方が概して大きいことが分かる．興味深いことは，日本株式市場と英国株式市場の共通点として，インプライドリスク中立分布の対数尤度が概してヒストリカル分布のものよりも大きいことである．つまり，両市場において，過去の株価データから導出したヒストリカル分布よりも，オプションの市場価格から導出したインプライドリスク中立分布の実現株価に対する整合性が高いことが分かる．

4.2.3 リアル分布の実現株価に対する整合性

全期間を通してリスク回避度が一定であると仮定して式(14)で与えられる対数尤度を最大化することで導出したリアル分布の対数尤度からインプライドリスク中立分布の対数尤度を引いた値を表12に，推定されたリスク回避度の値を表13に示した．表12から，5, 10, 20営業日でリアル分布の対数尤度はインプライドリスク中立分布の対数尤度よりも大きく，リアル分布の整合性がインプライドリスク中立分布の整合性よりも高くなることが分かった．また，表13から，リスク回避度は5, 10営業日では負，20営業日では正となり，投資家の効用関数は5, 10営業日ではリスク愛好的，20営業日に関してはリスク回避的となった．

また，先行研究Liu et al. (2007) の分析結果に基づき英国市場において導出したリアル分布からインプライドリスク中立分布の対数尤度を引いた値を表14に，推定されたリスク回避度を表15に示した．日本市場と同様にリアル分布の整合性は高くなっている．またリスク回避度γも正となっており，リスク回避的であることが分かる．日英のリスク回避度を比べると残存期間20営業日の場合には，日本市場がよりリスク回避的であることが分かる．

しかし表12に示した結果は，事後的にリスク回避度を推定した場合のものであり，リアル分布の整合性がインプライドリスク中立分布の整合性を上回るのは当然である．そこで，3.2.2節に示した分析手法に基

表10　対数尤度（日本）

残存期間	分布	BS	MLN	JD	GB2
5営業日	リスク中立	−907.31	−916.74	−915.16	−909.68
	ヒストリカルr	−911.75	−916.18	−922.67	−911.24
	ヒストリカルμ	−916.16	−929.06	−920.46	−918.20
10営業日	リスク中立	−960.65	−961.62	−961.51	−963.54
	ヒストリカルr	−968.33	−961.24	−972.96	−965.99
	ヒストリカルμ	−973.58	−996.43	−969.22	−970.87
20営業日	リスク中立	−1018.81	−1012.93	−1010.75	−1014.83
	ヒストリカルr	−1017.71	−1058.82	−1019.35	−1015.55
	ヒストリカルμ	−1024.13	−1117.93	−1015.59	−1022.28

表11　対数尤度（英国）

残存期間	リスク中立 MLN	リスク中立 GB2	ヒストリカル ARCH
20営業日	−846.64	−845.96	−848.82

表12　リアル分布（既知）とリスク中立分布の比較（日本）（リアル対数尤度—リスク中立対数尤度）

残存期間	BS	MLN	JD	GB2
5営業日	3.70	3.25	3.08	3.04
10営業日	0.29	0.26	0.26	0.25
20営業日	1.78	0.50	0.50	0.51

表13　リスク回避度γ（日本）

残存期間	BS	MLN	JD	GB2
5営業日	−15.77	−13.48	−12.37	−12.17
10営業日	−3.10	−2.78	−2.74	−2.75
20営業日	2.65	2.60	2.56	2.58

表14　リアル分布（既知）とリスク中立分布の比較（英国）（リアル対数尤度－リスク中立対数尤度）

残存期間	MLN	GB2
20営業日	0.76	0.76

表15　リスク回避度γ（英国）

残存期間	MLN	GB2
20営業日	1.85	1.86

表16 リアル分布（推定）とリスク中立の比較
（リアル対数尤度―リスク中立対数尤度）

残存期間	モデル	10期間	20期間	30期間
5営業日	BS	−2.81	1.07	2.89
	MLN	−2.56	0.52	2.48
	JD	−2.35	0.53	2.35
	GB2	−2.71	0.10	2.24
10営業日	BS	−2.81	−1.69	0.00
	MLN	−2.78	−1.96	−0.04
	JD	−2.66	−1.99	−0.04
	GB2	−2.84	−1.98	−0.06
20営業日	BS	−3.63	−0.70	−1.87
	MLN	−2.91	−0.03	−1.89
	JD	−0.06	0.47	−1.13
	GB2	−3.33	−0.71	−1.90

づいて，推定を行う時点までに利用可能な情報に基づいて導出したリアル分布の対数尤度をインプライドリスク中立分布の対数尤度と比較する．表16には，リアル分布の対数尤度からインプライドリスク中立分布の対数尤度を引いたものを示した．残存期間が5営業日の場合に，20，30期間を用いてリスク回避度を推定したリアル分布の対数尤度がインプライドリスク中立分布の対数尤度よりも上回っているが，実現株価に対するリアル分布の整合性は，インプライドリスク中立分布に劣るケースが多い．先行研究のような事後的な分析ではリアル分布の整合性は必ずインプライドリスク中立分布のものを上回る．しかし，現実の株価分布を推定する場合にリアル分布を利用する場合には推定時点までの情報からリスク回避度を推定する必要があること，また，推定されたリスク回避度が推定時点のインプライドリスク中立分布をリアル分布へと変換する際のリスク回避度として適切であるかという問題もあって，リアル分布の整合性がインプライドリスク中立分布のものよりも高くなるとは限らないことが分かった．

5. まとめと結語

本研究では，オプション市場価格データからインプライドリスク中立分布を4つの確率密度関数で抽出し，市場価格との整合性を比較した．また，これらのインプライドリスク中立分布，投資家のリスク回避度の影響を考慮したリアル分布，過去株価リターンからのヒストリカル分布の実現株価に対する整合性について比較した．

オプションモデル価格の市場価格との整合性の観点からは，インプライドリスク中立分布における高次モーメントの影響を柔軟に捉えることができるようなモデル化が相応しく，特にMLNモデルやJDモデルのフィッティングがBSモデルよりも良好であった．この分析結果は，市場の安定期，上昇期よりも混乱期に顕著に現れた．

実現株価との整合性の観点からは，上昇期におけるインプライドリスク中立分布には，ヒストリカル分布よりも市場参加者の的確な相場観が反映され，わずかだが対数尤度が大きくなった．また投資家の相場観を柔軟に抽出することができるMLN，JD，GB2モデルの実現株価に対する整合性がBSモデルよりも高かった．その反面，市場の混乱期においては，市場参加者の相場観が的確とはいえずインプライドリスク中立分布はヒストリカル分布にノイズが加わる形となり，市場価格との整合性の高いモデルが実現株価に対し整合的なモデルとなるわけではないことが分かった．また投資家のリスク回避度を考慮したリアル分布の実現株価との整合性は，推定時点までの情報から適切なリスク回避度を推定するのは難しく，必ずしもインプライドリスク中立分布の整合性を上回るわけではないことが分かった．

付録 JDモデルのリアル確率密度関数

$$\tilde{g}(x)=x^{\gamma}g(x)\{S_0^{\gamma}\exp(\gamma rT +0.5(\gamma^2-\gamma)\sigma^2 T-\lambda(1+\gamma\beta)T +\lambda(1+\beta)^{\gamma}T\exp(0.5(\gamma^2-\gamma)\delta^2))\}^{-1}$$

謝辞 初稿を改善するために有益なコメントを下さった2人の査読者には心から御礼申し上げます．

参考文献

[1] D. T. Breeden and R. H. Litzenberger: "Prices of State-contingent Claims Implicit in Option Prices," *Journal of Business*, 51 (1978), 621-651.

[2] M. Rubinstein: "Implied Binomial Trees," *The Journal of Finance*, 49 (1994), 771-818.

[3] P. W. Buchen and M. Kelly: "The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31 (1996), 143-159.

[4] J. C. Jackwerth and M. Rubinstein: "Recovering Probability Distributions from Option Prices," *The Journal of Finance*, 51 (1996), 1611-1631.

[5] S. Nomura and K. Miyazaki: "A valuation of far out-of-the-money options based on implied Normal/NIG Distributions," *JAFEE Journal*, (2006), 3-31 (in

Japanese).

[6] R. R. Bliss and N. Panigirtzoglou: "Option-Implied Risk Aversion Estimates," *Journal of Finance*, 59 (2004), 407-446.

[7] X.Liu, M. B. Shackleton, S. J. Taylor and X. Xu: "Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions," *Journal of Banking and Finance*, 31 (2007), 1501-1520.

[8] F. Black and M. Scholes: "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of political economy*, 81 (1973) 637-654.

[9] R. J. Ritchey: "Call Option Valuation for Discrete Normal Mixtures," *Journal of Financial Economics*, 13 (1990) 285-296.

[10] R. C. Merton: "Option Pricing when underlying stock returns are discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), 125-144.

[11] R. Bookstaber and J. MacDonald: "A general distribution for describing security price returns," *Journal of Business*, 60 (1987), 401-424.

[12] 日経ヴェリタス, online: http://veritas.nikkei.co.jp/features/14.aspx?id=MMVEw4005004112008, 日本経済新聞社, 2009年2月27日.