

マッチング理論とその応用¹

佐々木宏夫

マッチング市場とは、2種類の異なるタイプのプレイヤーが対峙して、相手側のプレイヤーに対する選好を持っている市場である。本稿では、主に1対1の結婚市場を例にとって、そこでの均衡概念である安定性について述べ、さらに安定マッチングを求めるためのアルゴリズムを解説する。さらに、安定マッチングを与えるメカニズムが戦略的操作不可能性を満たすかどうか調べることによって、マッチング・メカニズムの戦略的特性について議論する。続いて、マッチング市場における外部性の効果を検討し、最後に研修医マッチング・プログラムなど、現実に利用されているマッチング・メカニズムを紹介する。

キーワード：マッチング市場、安定マッチング、結婚問題、ゲール＝シャプレイ・アルゴリズム、学校選択制、研修医マッチング、外部性

1. はじめに

労働市場は、労働者と企業という異なる種類のプレイヤーたちが対峙（対面）して、どの労働者がどの企業で働くか、という形で労働者と企業の組み合わせが形成される場である。労働市場に限らず、一般に2種類の異なるタイプのプレイヤー達が対峙して、一方のプレイヤー達と他方のプレイヤー達の間での組み合わせが形成される場を「マッチング市場」という²。

現実社会には、労働市場以外にもさまざまなマッチング市場がある。例えば、「男性」というプレイヤーと「女性」というプレイヤーとが対峙してカップル（夫婦）が形成される場合は、「結婚市場」と呼ばれる。あるいは、「大学」というプレイヤーと「受験生」というプレイヤーが対峙しているのは、「大学入学者選抜市場」である³。

これらの市場でプレイヤーたちは、自分の反対側にいるプレイヤーに対する主観的ランク付け（これを「選好」という）をもっている。結婚市場を例に取れば、各男性はどの女性が一番好きで、次が誰で、……、という形の主観的ランク付けを女性たちに対して行っているし、女性たちもまた男性の好ましきさについて主観的ランク付けを行っている⁴。

結婚市場で男性と女性は、男性1人と女性1人の組み合わせでカップルを形成する。このような1対1で

組み合わせが行われたとき、そこで成立する組み合わせを「1対1マッチング」と呼ぶ。

結婚市場では男女1対1のマッチングが形成されるが、労働市場や大学入学者選抜市場では、企業や大学には一般に複数の労働者や学生が配属され得るので、「1対多数マッチング」が形成されることになる⁵。本稿では、マッチング理論の基本構造をできる限り読者に分かりやすく解説するため、主に結婚問題を例にとって1対1のマッチング市場を中心に説明することにしたい（ただし、第5節では、大学入学者選抜市場や学校選択問題などを取り上げるため、1対多数マッチングに言及することになる）。したがって、第5節より前の節では、特に断りなく「マッチング」といった

¹ 本稿の作成に当たり、日本学術振興会の科学研究費補助金基盤研究(C)（課題番号19530162）の支援を受けた。

² 佐々木[7]が、マッチング問題を一般読者向きに紹介した私の知る限り日本で最初の文献と思われる。

³ 言うまでもなく結婚市場や大学入学者選抜市場は、通常の経済学的意味での「市場」とは異なるものだが、ここでは「組み合わせ形成の場」というより広い意味合いで「市場」という言葉を使うことにする。

⁴ ここでは議論の単純化のため、選好において「無差別である」（すなわち、「同じ程度に好ましい」）ことはなく、2つの評価対象が異なるならば、どちらかが他方よりも「真に好ましい」という判断が必ずできるものとする。このような無差別関係を許容しない選好を「厳密な選好」ということもある。

⁵ マッチングの分野で主に研究されているのは1対1および1対多数の市場であるが、ときには「多数対多数」のマッチング市場が研究されることもある。例えば大学の非常勤講師は複数の大学で教鞭をとることがあるので、その労働市場は「多数対多数」のマッチング市場であるといえる。

ときには、結婚市場における1対1マッチングを意味するものと理解していただきたい。

Gale and Shapley[3]以来のマッチング理論における基本的な解(均衡)概念は、「安定性」である。この厳密な定義は次節で与えるが、例えば結婚市場における安定性を直感的に言えば、「どのプレイヤーも離婚することができないような男女のマッチングが成立している状態」である。どのカップルも「離婚」できないようにマッチングが形成されているなら、そこにおけるカップルの組み合わせは永続することになる。その意味で安定なマッチングの形成は、このゲームの「均衡」状態だとみなせるのである。

本稿では、マッチング理論の概要をできる限りわかりやすく解説するため、次節では安定性について正確に定義した上で、安定マッチングを求めるアルゴリズムを紹介する。第3節では、戦略的操作性について議論し、第4節では外部性を考えることの意義を述べ、さらに外部性を伴う場合の安定マッチングについて解説する。第5節では、研修医のマッチング問題や学校選択制問題など、現在現実に用いられているマッチング理論の応用例を紹介する。

2. 安定性とゲール＝シャプレイ・アルゴリズム

前節で「安定なマッチング」とは「離婚ができない状態」であると直感的に理解したが、それはどのような状態なのだろうか？

いま太郎と花子がカップルを形成しているものとしよう。もしこの2人のどちらもが相手を一番好んでいるなら当然離婚は生じないだろう。離婚が生じるためには、少なくともどちらかにとって相手が2位以下にランクされていなければならない。そこで、太郎は今のパートナーの花子よりも松子を好んでいるものとしよう。

しかし、単に「今のパートナーよりも好きな人がいる」ということだけでは離婚は実現しない。離婚が成立するためには、松子もまた今のパートナー(次郎としよう)よりも太郎を好きでなければならない。その場合には、太郎と松子はともに現在のパートナーと離婚して、2人で新たなカップルを形成しようとするだろう。だが、たとえ太郎が松子を好きだったとしても、松子が次郎ほどに太郎を好きでなければ離婚は成立しないのである。

このように、「離婚ができない状態」とは、どのプ

レイヤーにとっても、仮に今の自分のパートナーよりも好きな人がいたとしても、その人にとってはそのプレイヤーよりも今のパートナーの方が好ましいという状態が成立していることなのである。

このことをより正確に表現するために、まず結婚市場でのマッチングの概念をきちんと定義することから始めよう。男性の集合を M 、女性の集合を W とするとき、マッチング μ とは、①任意の $m \in M$ と $w \in W$ に対して $\mu(m) = w$ かつ $\mu(w) = m$ であるような $M \cup W$ から $M \cup W$ への全単射であり⁶、②任意の $m \in M$ に対して、 $\mu(m) \in W \cup \{m\}$ 、さらに③任意の $w \in W$ に対して、 $\mu(w) \in M \cup \{w\}$ となるものである。

この定義において μ はパートナーを指定する関数であり、もし $\mu(m) = w$ (すなわち、 $\mu(w) = m$) であるならば、マッチング μ において m と w が互いにパートナーだということになる⁷。

さて、あるマッチング μ の下で、① m は μ における自分のパートナー $\mu(m)$ よりも w を好み、かつ② w は μ における自分のパートナー $\mu(w)$ よりも m を好むような、 $\mu(m) \neq w$ である男性 m と女性 w が存在したならば、このマッチング μ は不安定であるといわれる。不安定でないマッチングは安定であるといわれる⁸。

安定なマッチングの存在は、ゲール＝シャプレイ(GS)アルゴリズム⁹を用いることで簡単に確認できる。このアルゴリズムは次のように機能する。

【ステップ1】 ①各男性は、自分自身より好ましい女性の中で、もっとも好ましい女性にプロポーズする。

②各女性は、彼女にプロポーズした男性の中に彼女自身よりも好ましい人がいるときには、その中からもっとも好ましい男性をこの段階の仮のパートナーとして手元に残し、残りの男性を拒絶する。

以下、ステップ2、ステップ3、……、と進行して、

⁶ つまり、 $\mu^{-1} = \mu$ である。

⁷ m や w が独身でいるときには、 $\mu(m) = m$ や $\mu(w) = w$ となる。

⁸ すなわち、 μ が安定なマッチングであるとは、 $\mu(m) \neq w$ なる任意の (m, w) について、①もし m が $\mu(m)$ よりも w を好むならば、 w は m よりも $\mu(w)$ を好むか、②もし w が $\mu(w)$ よりも m を好むならば、 m は w よりも $\mu(m)$ を好む、ことを意味している。

⁹ 近年は deferred acceptance アルゴリズムと呼ばれることも多いが、ここではこのアルゴリズムの開発者にちなんだ名を用いることにする。

ステップ $t-1$ まで終了したとする。

【ステップ t 】①ステップ $t-1$ で女性から拒絶された男性は、ステップ $t-1$ またはそれ以前に彼を拒絶した女性たちを除く女性の中に自分自身よりも好ましい人がいるときには、その中でもっとも好ましい女性にプロポーズする。

②各女性は、ステップ $t-1$ で仮のパートナーとした男性とこのステップで彼女にプロポーズした男性の中に自分自身よりも好ましい人がいるときには、その中からもっとも好ましい男性を選び、彼をこのステップでの仮のパートナーとして手元に残す。そして、残りの男性を拒絶する。

このようにステップが進行していき、どの女性も拒絶することがなくなったとき、このプロセスは停止する。男性の集合と女性の集合は共に有限集合なので、プロセスは必ず有限回のステップを経て停止する。停止した時点では1対1のマッチングが得られている。そのマッチングが安定であることを示すのは容易である。

ここでは、1対1マッチングに限定して安定性の概念とそれを実現させるアルゴリズムについて説明したが、ここでの説明は自然な形で1対多数モデルに拡張され得ることを付記しておく。

3. 戦略的問題

GS アルゴリズムによって一つの安定マッチングが得られるが、一般に1つのマッチング問題¹⁰に複数の安定マッチングが存在することがある¹¹。任意のマッチング問題においてGS アルゴリズムによって得られるマッチング μ^* は、この問題のあらゆる安定マッチングと比べたときに男性にとってもっとも有利であることが知られている。つまり、「他の安定マッチングと比べて男性にとって最も有利」とは、 μ を μ^* と異

なる任意の安定マッチングとすると、任意の男性 m にとって、 μ^* で得られる女性 $w = \mu^*(m)$ が、 μ で得られる女性 $w' = \mu(m)$ と異なるならば、 m にとって w は w' よりも好ましいことを意味している。このような性質を「M-最適性」(M-optimality) という。

これと対称的に、女性にとってもっとも有利な安定マッチング(すなわち、「W-最適」なマッチング)も定義できる。GS アルゴリズムを、男性でなくて女性がプロポーズする形になるよう、男性と女性の役割を入れ替えれば、そこで得られる安定マッチングは「W-最適」になるのである。

M-最適およびW-最適なマッチングは、マッチング問題の解の戦略的特性を考えるために重要である。次のように進行する非協力ゲームを考えてみよう。

- ① 男性も女性も自分の選好を調停者(例えば、仲人)に伝える。
- ② 調停者は、各人が申告した選好に基づいてGS アルゴリズムを動かす、それによって得られた安定マッチングで男女のペアを作っていく。

この非協力ゲームでは、各人が表明する選好が戦略となる。一般に各人が表明するメッセージに対して、どのようにマッチングが形成されるのかを指定する関数を「メカニズム」(あるいは「ルール」)という¹²。今考えているケースでは、メッセージとして各人が表明する選好が用いられ、②でメカニズムが具体的に定義されている。

さて、上記のようなメカニズムでマッチングが決定される非協力ゲームが演じられたとき、各プレイヤーは正直に自分の真の選好を表明するのだろうか？

すなわち、プレイヤー $a(a \in M \cup W)$ の真の選好が P_a であったときに、この人は果たして自分の選好として正直に P_a を調停者に表明するのだろうか？

この問題に対する答えは部分的にYesである。つまり、男性がプロポーズする形でのGS アルゴリズムではM-最適なマッチングが得られるが、この場合には男性側には嘘をつく余地はない。つまり、M-最適なマッチングが実現される以上、男性は嘘をついて別

¹⁰ プレイヤーの集合と全プレイヤーの選好を並べたもの(これを「選好プロファイル」という)の組を「マッチング問題」という。結婚問題を例にとると、 M と W を男性と女性の集合とする。 $a \in M \cup W$ について P_a がプレイヤー a の選好であるとき、 $P = (P_a | a \in M \cup W)$ が選好プロファイルである。このとき、 $(M, W; P)$ をマッチング問題(この場合は、特に結婚問題)と呼ぶ。

¹¹ 協力ゲームの基本的な解概念の一つに「コア」があるが、安定なマッチングの集合はコアと一致することが知られている。

¹² マッチングだけに限らず、一般に希少な資源をどのように人々に配分したらいいのか、という問題を考える際にもメカニズムの概念が用いられる。その場合には、各人が表明するメッセージに対して資源配分を指定する関数がメカニズムだということになる。

の安定マッチングを実現させたとしても、自分が有利になることはないのである。

より一般的には、M-最適な安定マッチングを実現させるようなメカニズムの下では、すべての男性にとって自分以外のプレイヤーがどのような選好を表明しようとも、自分の真の選好を表明するのが最適なのである¹³。

それに対して、女性は嘘をついてトクすることがある。例えば、3人の男性（太郎、次郎、三郎）と3人の女性（松子、竹子、梅子）がいたとして、彼らは表1のような真の選好を持っていたとしよう。誰もが自分を最下位に置いているので、本心では独身を通すぐらいならば誰かと結婚したいと思っている。

このような選好プロファイルの下で、もし全員が正直だったならば、一郎と松子、次郎と梅子、そして三郎と竹子のカップルがGSアルゴリズムで得られる。このとき、一郎と三郎が一番好きな人と、次郎は2番目の人と結ばれている。それに対して、竹子と梅子は3番目、松子は2番目の人と結ばれている。明らかにこれは、男性と比べると女性に不利な結果である。

ここで、松子が自分の真の選好における一郎と次郎の順を入れ替えて、1番が三郎、2番が次郎、3番が一郎で、4番が自分だという嘘をついたらどうなるだろうか。話を簡単にするため、他の人々は正直だったとしよう。しかし、たとえ他人が正直だったとしても、このような嘘によって、一郎と竹子、次郎と梅子、三郎と松子のカップルが成立する。松子は正直に振る舞ったときには2番目に好きな一郎としか結ばれないが、このような嘘をつくことで一番好きな三郎と結婚できるのである。したがって、少なくとも松子は嘘をつく動機を持つことになる。

実は結婚問題では、①男性（あるいは女性）にとって真の選好表明が支配戦略になるメカニズムが存在するが、②安定マッチングを実現させるメカニズム（こ

れを「安定マッチング・メカニズム」と呼ぶことにする）の中で、すべてのプレイヤーが真の選好表明をするようなものは存在しないことが知られている。

以上のように、マッチング問題において、戦略的操作性の研究——すなわち、嘘の選好表明という戦略的振る舞いによって、自分にとってより有利なマッチングを実現させるように状況を操作することが可能かどうかの研究——は重要な研究課題の一つである¹⁴。

4. 外部性と片側外部性

マッチング問題の理論研究は多岐にわたっている。例えば、①さまざまな設定の下での安定マッチングに到達するアルゴリズムの開発、②適切な非協力ゲームを構築して、そのゲームの解（ナッシュ均衡）として社会的、倫理的等々の観点から望ましいマッチングを実現させることができるかの研究、③協力ゲーム理論的枠組みの中で、安定マッチングの集合等がいかなる公理群によって特徴付けられるかの研究などをあげることができる。

ここでは、選好に外部性が伴う場合について考えてみたい。

結婚問題における外部性は、「嫉妬」（外部不経済）¹⁵や「優越感」（外部経済）として理解するとわか

¹⁴ 一般にあるメカニズムにおいて、すべてのプレイヤーにとって真の選好表明が支配戦略になっているとき、戦略的操作不可能であるという。この言葉を用いると、結婚問題においては戦略的操作不可能な安定マッチング・メカニズムは存在しないことになる。戦略的操作不可能性の概念をいくらかゆるめて、プレイヤーのある部分集合 N_0 に属する者にとっては真の選好表明が支配戦略になっているときに、「 N_0 のメンバーにとって戦略的操作不可能である」という言い方をすることにすれば、結婚問題についてはM-最適なメカニズムは「男性にとって戦略的操作不可能な安定マッチング・メカニズム」であり、W-最適なメカニズムは「女性にとって戦略的操作不可能な安定マッチング・メカニズム」だということになる。

¹⁵ 資源配分の公平性を評価するための基準として、無羨望（envy-free）という概念がある。つまり、成立した資源配分において、他人が受け取っている財ベクトルと自分が受け取っている財ベクトルとを、自分の選好で評価したときに、もし誰かの財ベクトルが自分の財ベクトルよりも高く評価されてしまうならば「羨望が生じる」といい、どのプレイヤーにも羨望が生じないような資源配分が無羨望と呼ばれるのである。これも一種の「嫉妬」の概念であることはたしかだが、無羨望性は外部性のない選好においても定義されうる概念であり、個々の資源配分ごとに成立したりしなかったりする概念である。それに対して、ここで解説する嫉妬の概念は、選好それ自体が持つ性質であることに注意していただきたい。

表1 各プレイヤーの選好

		1番好き	2番目に好き	3番目に好き	4番目に好き
男性	一郎	松子	竹子	梅子	自分
	次郎	松子	梅子	竹子	自分
	三郎	竹子	松子	梅子	自分
女性	松子	三郎	一郎	次郎	自分
	竹子	次郎	一郎	三郎	自分
	梅子	三郎	一郎	次郎	自分

¹³ 「他のプレイヤーがどのような戦略を取ろうとも、常に最適であるような戦略」を「支配戦略」という。

りやすいだろう。結婚するにあたって自分のパートナーが誰であるかはもちろん大事なことだが、他人が誰と結婚しているかも自分の効用の大きさに反映されることがあるかもしれない。例えば、自分のあこがれの異性が友人と結婚したことを知ったとき、たとえ自分のパートナーがどれほど魅力的な人であったとしても、効用が低下してしまう（つまり、自分を不幸に感じてしまう）人があるかもしれない。それとは逆に、自分のライバルのパートナーがたいした人でないことを知ったときに、効用が高まる場合もあるかもしれない。

このような嫉妬や優越感といった感情を持つ人は、自分のパートナーが誰かということだけでなく、他人がどのような相手と結婚しているかということ、つまり、今いかなるマッチングが成立しているのかに関心を持っているということができるだろう。すなわち、外部性を伴う選好は、自分と反対側にいるプレイヤーの集合上で定義されるのではなくて、この問題におけるあらゆるマッチングの集合上で定義されるのである。

外部性があるとき、安定性をどう定義したらいいのだろうか？

「離婚」を考えるプレイヤーにとって、パートナーを変えた場合の効用がどうなるかは、自分がパートナーを変えた場合にどのようなマッチングが成立するかの予想に強く依存するだろう。例えば、今のパートナーの w と別れて、彼女よりも魅力的な女性である w' との結婚を望んでいる男性 m がいたとしよう。ところが、仮に w と離婚した場合、 w は m が大嫌いな m' と再婚するかもしれないという見込みが生じてしまったなら、 m としては w と m' の再婚を阻止するために w との離婚を思いとどまろうという気持ちになるかもしれない。このように、離婚後成立するであろうマッチングについての予想形成のありようは、安定性の定義に影響を及ぼし得るのである。

Sasaki and Toda[10]は、2つの極端な予想形成のありようを考察した。一つは「自分以外の者は、常に自分にもっとも有利になるように行動してくれる」という楽観的予想であり、もう一つは「自分以外の者は、自分にもっとも不利になるように行動する可能性がある」という悲観的予想である。そして、それぞれの予想の方式を前提に「離婚することができない」状態として安定性が定義される。このように安定性を定義したとき、悲観的な予想の下では必ず安定マッチングが存在するが、楽観的な予想の下ではその存在が保証されないことが示された¹⁶。

以下では、安定マッチングの存在が常に保証される悲観的な予想の下での安定性を、外部性が存在する文脈での安定性概念として採用しよう。この安定性概念の下で、安定マッチングは必ずしも効率的（パレート効率的）でない。外部性が存在する場合に資源配分の効率性が成立しなくなることは多くの経済モデルで観察されることだが、外部性のある結婚問題で特徴的なことは、たしかにすべての安定マッチングが効率的ではないのだが、少なくとも一つ効率的な安定マッチングが存在することである。

ところで、外部性がある場合にはM-最適なマッチングやW-最適なマッチングの存在は保証されない。したがって、外部性がないケースでの戦略的操作性に関する帰結はここで直ちには適用できない。

Sasaki[8]は、どちらか一方の側の選好にだけ外部性がある「片側外部性」について研究した。例えば、ハイテク産業の労働市場などを考えてみよう。企業 f が高度な技術的ノウハウを持つ労働者 w の解雇を考えているものとしよう。 f 社が w の解雇に踏み切れるかどうかは、解雇後の w の去就に対する予想に強く依存するだろう。もし w がライバルの f' 社に雇用される可能性があり、 w がこれまでに蓄積した技術力等をベースにして f' 社の成長に貢献する可能性があれば、 f 社は容易に w の解雇に踏み切れないだろう。

この種の外部効果は、個人レベルの嫉妬や優越感といったものよりも経済学的な重要性があり、また企業活動において強力に機能する可能性が高い。そのように考えると、この種の労働市場では、企業は外部性のある選好を持ち、労働者は外部性のない選好を持つと仮定することには一般性があるだろう。

Sasaki[8]はこのような問題意識に基づいて、片側外部性のある問題の研究の第一歩として、1対1マッチング問題での片側外部性の効果を研究した。片側外部性のある問題は、両側外部性のある問題や外部性のない問題とは異なるいくつかの面白い性質を持っている。その中でもとりわけ興味深いのは、女性側にだけ外部性があるという形で片側外部性が存在した場合、この文脈に添うように修正されたGSアルゴリズムで得られるマッチングはM-最適にならないにもかかわらず、そのマッチングを実現させるようなメカニズム

¹⁶ Sasaki and Toda[10]では、さらに「悲観的な予想以外の安定性概念では安定マッチングの存在が保証されない」ことも示されている。

は男性にとって戦略的操作不可能になるという定理である。このように片側外部性が存在すると、M-最適性と戦略的操作性との関連はなくなるのである。

片側外部性を伴ったマッチング市場の研究はまだ十分に進んでいるとは言い難いが、労働市場では技術的知識等のスピルオーバー効果の存在がしばしば指摘されているし、例えば大学入学者選抜市場でも、良い学生は他の学生に良い影響を与え、悪い学生は悪い影響を与え得るといったことからわかるように、外部効果が存在している可能性がある。したがって、この方向での研究の深化が必要であろう。

5. 実証研究および現実への応用

ゲーム理論では、とりわけナッシュ均衡が関数で表現される場合など、均衡の形状が複雑であることが少なくない。そのため理論的に得られた結論の妥当性をデータに基づいて実証的に検証するという、経済学で普通に用いられている方法の適用が困難になることが多い。近年この領域で実験研究が盛んなのは、一つには実証の難しさという事情によるのかもしれない。そのような事情がある中で、マッチング理論は例外的に実証研究やケーススタディが盛んな領域である。

マッチング市場のケーススタディとして有名なのが、A. Roth によるアメリカの医学部卒業者の研修先を決定する「研修医マッチング市場」の研究である。アメリカでは、第二次世界大戦終戦前後から医学部卒業生の研修病院の決定に際して病院間での学生獲得競争が激化し、いわゆる「青田買い」が進行していった。その結果、大学での教育に否定的な影響が生じてしまい、この問題を解消するため統一した研修医マッチング市場の開設が模索され、1951年に「全米インターン・マッチング・プログラム」(National Intern Matching Program: NIMP) が活動を開始した。NIMP はその後「全米研修医マッチングプログラム」(National Resident Matching Program: NRMP) と改称されて現在に至っている。

NIMP においては、まず各学生および各病院から入りたい病院や採りたい学生をランク付けしたリスト(これが選好の表明になる)が提出され、「NIMP アルゴリズム」と呼ばれるマッチング・アルゴリズムを用いて病院と学生のマッチングが行われる。Roth の発見によると、このアルゴリズムは Gale and Shapley[3]の論文が発表されるはるか前に作られたものだが、驚くべきことに GS アルゴリズムを用いた場合

と同じ安定マッチングが得られることが Roth によって示された。NIMP アルゴリズムはその後修正を経て今も実施されている¹⁷。

日本における唯一のマッチング市場の実証研究は、佐々木[9]による早稲田大学高等学院における進学先の学部、学科、専修を決定するメカニズムの研究である。

早稲田大学の附属高校である高等学院では原則として毎年約 600 名の卒業生全員が早稲田大学に推薦で進学できることになっているが、進学先の決定に際して、生徒の希望を最大限に生かし、かつ各学部、学科、専修別に設定された定員と整合的な配属を行うため、生徒が提出した希望進学先のリスト(これが選好にあたる)に基づき、GS アルゴリズムによる配属を少なくとも 1960 年代から行っていた。しかも興味深いことに、このアルゴリズムは GS アルゴリズムとまったく同じものではあるが、Gale and Shapley[3]とは独立に開発されたものであった。その後若干の調整はあったものの早稲田大学高等学院および本庄高等学院では今に至るまでこの方式でのマッチングが行われている。

以上の 2 つの事例は Gale and Shapley[3]とは独立に構築されて今も機能しているマッチング市場の例であるが、近年ではマッチング理論を積極的に活用してマッチング市場を新たに構築しようという動きも盛んである。

そのような活用例を代表するのは、公立学校(小学校や中学校)の「学校選択」の問題である。日本でも昨今公立学校間の競争を刺激し、保護者および児童・生徒の選択肢を増やすため、学校選択制を導入する自治体が増えつつある。また、アメリカでも学校選択制は広く行われている。

学校選択制の具体的方式は国や自治体ごとにより異なっている。アメリカでの学校選択制においては、ある地域に住む者は選択可能な学校の中から入りたい学校の順位付けを行い、学校(あるいは教育委員会等の管理機関)はあらかじめ定められたルールに従って児童・生徒の優先順位を付けるという形で、マッチング・メカニズムにおける選好表明に近いことが行われ、それに基づいての通学校の決定がなされている。さらに、近年はマッチング理論の成果を利用した制度設計

¹⁷ 日本でも 2004 年度から「医師臨床研修医マッチング協議会」が組織され、GS アルゴリズムを用いてのマッチングが行われるようになった。

の動きも盛んで、ニューヨーク市とボストン市ではGSアルゴリズムをベースにした学校選択制が実施されている¹⁸。

日本における学校選択制はアメリカほどドラステックではなく、保護者が学校変更の要望を教育委員会に提出し、一定の基準を満たした者に対して変更を許可するという形で実施されていることが多い。その意味では、日本においては、今後いかにしてマッチング理論の成果を、学校選択制の制度設計に取り入れたらいいのかというのが一つの論点になろう。

* * *

以上、マッチング理論の概要と利用についてその概観を展望してきたが、学校選択制への適用など、マッチング理論を用いた市場設計の可能性は広がりつつある。

これは、第1にマッチングのモデルが比較的シンプルであることと、第2に安定性などの概念が直感的でわかりやすいことなどに由来しているものと思われる。さらに、マッチング・モデルでは、アルゴリズムも直感によって作りやすいといったメリットがあるので、今後もこの理論の適用範囲は拡大し続けるものと思われる。

参考文献

- [1] M. Balanski and T. Sonmez, A tale of two mechanisms: Student placement, *J. of Econ. Theory*, 84, 73-94, 1999.
- [2] G. Demange and D. Gale, The strategy structure of two-sided matching markets, *Econometrica*, 53, 873-888, 1985.
- [3] D. Gale and L. Shapley, College admission and the stability of marriage, *American Math. Monthly*, 61, 9-15, 1962.
- [4] 小島武仁, 安田洋祐, 「マッチング・マーケットデザイン」『経済セミナー』647, 135-145, 2009.
- [5] A. Roth and M. A. O. Sotomayor, *Two-sided Matching: A Study in Game Theoretic Modeling and Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [6] A. Roth and M. A. O. Sotomayor, Two-sided matching, in R. Aumann and S. Hart eds, *Handbook of Game Theory with Economic Application*, Vol. 1, North-Holland, 1992.
- [7] 佐々木宏夫, 「結婚の経済学1~6」『日本経済新聞』(1992年8月8日~8月14日「経済教室」).
- [8] H. Sasaki, Two-Sided matching problems with one-sided externalities, paper presented at NATO Advanced Research Workshop, Mathematical Theories of Discrete Resources: Equilibria, Matchings, Mechanisms, Istanbul, Turkey, 2001.
- [9] 佐々木宏夫, 「マッチング問題とその応用: 大学入学者選抜の事例研究」日本オペレーションズ・リサーチ学会第51回シンポジウム『ゲーム理論と離散数学の出会い』予稿集 (2004年3月) (http://www.orsj.or.jp/~archive/pdf/sym/S51_025.pdf).
- [10] H. Sasaki and M. Toda, Two-sided matching problems with externalities, *J. of Econ. Theory*, 70, 93-108, 1996.

¹⁸ 小島・安田[4]