

オークションの理論

赤星 立

交渉など、あまたある資源配分メカニズムの中で、不特定多数の人々を対象にした財の取引を遂行するメカニズムとしてのオークションの持つ優位性は高い。本稿では、効率性および誘因両立性という観点から、制度を設計する者の意図がいかなるオークション・メカニズムにおいて実現するのかを検討したい。紙数の関係もあって、ここでは多数のオークション・メカニズムの中から、効率性と誘因両立性を実現させるオークションのベースモデルといえる VCG メカニズム、漸近的に資源配分の効率性を実現させる k -ダブルオークションという、二種類の典型的な複数財のオークション・メカニズムを紹介する。

キーワード：オークション，ダブルオークション，非完備情報ゲーム，VCG メカニズム，効率性，誘因両立性

1. はじめに

オークションには様々な種類のものがある。例えば、買い手または売り手の一方を決めるものだけでなく、両者を同時に決めるオークションも存在する（前者をシングルオークション、後者をダブルオークションと呼ぶ。本稿では、特に断らない限りシングルオークションでは買い手を決めるオークションを考える）。

オークション理論では、次節で詳しく述べる「配分ルール」および「支払いルール」（これらを「ルール」と総称する）によってオークションが一般的に定義される。扱われる財の個数や性質、および参加するプレイヤーの性質等がルールの定義にあたって考慮されるオークションの具体的な特徴である。財の性質については、石油探掘権のように、すべてのプレイヤーが財に対して等しい価値を持つ財（共通価値モデルと呼ばれる）なのか、あるいは絵画のオークションのように、各プレイヤーが異なる価値を持つ財（私的価値モデルと呼ばれる）なのか、ということだけでなく、複数個の財が同時にオークション市場に出される場合、各財が同質的か否か、異なっていれば補完的または代替的關係にあるかということなども問題になる。プレイヤーの性質は、基本的には各プレイヤーの選好によって表現されるが、選好をより具体的に特徴付けるのは、各プレイヤーの財に対する支払い意欲やリスクに対す

る態度などである。

制度を設計する者は、財の性質やプレイヤーの特徴などを見極めた上で、どのようなルールを設定するのかを決定しなくてはならない。さらに、例えば最低売却価格を設定した方がよいのか、複数個を売る場合は一回のオークションで同時に売却すべきか、それとも複数回のオークションに分けて売却すべきかなど、設計者の持つ目的に応じて、目的達成のために適切なメカニズム・デザインを行う必要がある。

次節では、オークションをゲーム理論的に分析するための設定を行う。つまり、オークションよりも広い概念である「メカニズム」の概念を定義し、顕示原理と呼ばれる定理を紹介する。オークションの研究は、現実の具体的なオークションの設計などだけではなく、何らかの望ましさの基準を満たすオークション・ルールの一般的特徴付けなどをも研究対象としているが、顕示原理はこうした考察における武器となるものである。

ところで、上述のようにオークションを分類すれば非常に多岐にわたるので、本稿では紙数の関係もあってそのごく一部しか紹介できない。例えば、ただ1つの財が売買されるオークションに関しては、封印式（入札）での第一価格式オークションと第二価格式オークション、および公開式（セリ）での英国式オークションとオランダ式オークションが基本的¹であるが、

あかほし たかし
早稲田大学 基幹理工学研究科
〒169-0072 新宿区大久保 3-4-1

¹ これらの基本的なオークションにおいて、いくつかの仮定の下で、売り手の期待収益は等しくなることが知られている。これを収入等価定理と呼ぶ。

読者はこれらのオークションについての解説を入門的な教科書などでお読み頂けると思う²。そこで、本稿ではもう少し複雑なオークションについて解説したい。つまり、いずれも私的価値モデルで、さらに、複数財が同時に売買され、買い手は1単位のみを需要するケースを具体例として取り上げてみたい。すなわち、第3節では、VCGメカニズムと k -ダブルオークションという、複数財取引のための典型的なオークション・メカニズムを紹介する。

本稿では取り上げない共通価値オークションや、買い手が複数個を需要する場合などについてお知りになりたい読者は、以下の文献などを参考にされたい。まず、Krishna[5]とMilgrom[7]は、この分野の最も有名で基本的なテキストである。Klemperer[4]は、具体的な事例を交えて書かれている。Janssen[2]は、欧米でのオークションによる公共財の売却の例や、オークション以外の方法との比較にも触れている。McMillan[6]は、数式を用いずに、築地市場などの具体例に多く言及した優れた入門書である。坂井・藤中・若山[11]は、オークション理論のみならず、第2節で触れるメカニズムデザイン全般について言及した日本語の優れたテキストである。

最後に、オークションは数多くの経済実験による分析が行われてきた分野でもある。実験は、構築されたオークション市場が、実際の運用に耐え得るかを確かめるために、理論と実際との齟齬を明らかにするなど、様々な興味深い知見をもたらしてきた。本稿では実験研究については解説しないが、例えば、今回の特集においても、下村研一教授がダブルオークションに関する興味深い実験結果について報告しておられるので、関心をお持ちの読者は、下村教授の論文もお読み頂きたい。

2. メカニズムデザインと顕示原理

2.1 非完備情報ゲームとしてのオークション理論

近年の研究において、オークションは、主に非完備情報ゲームとして定式化され、分析されてきた。つまり、各プレイヤーが購入または販売しようとする財の価値についての同時分布が共有知識として与えられる下で、各プレイヤーは自分の価値についての情報を持つ。各人は、この事前分布と自分の価値についての情報に基づいて、自分以外のプレイヤー達の価値の同時

分布を求め、自らの期待効用を最大化させるような額を入札するのである。ここでは、各プレイヤーの価値(シグナル)は区間 $[0, \omega_i]$ (財が複数個あるときはその直積)上に存在するものと仮定する。なお、以下では、財の個数を問わずに、プレイヤー i のシグナル空間を Ω_i と書くことにする。

2.2 メカニズムとは

一般に、「メカニズム」とは、(1)各プレイヤー $i=1, 2, \dots, n$ のメッセージの集合 B_i 、(2)各メッセージの組に対して誰に財を割り当てるのかを指定する配分³ルール(allocation rule) $\pi: \mathbf{B} \rightarrow \Delta$ (Δ はあらゆる可能な配分の集合であり、 $\mathbf{B} = \prod_{i=1}^n B_i$ である)、および(3)同じく各メッセージに対して各人の支払い額を決める支払いルール(payment rule) $\mu: \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ から成る。

与えられたメカニズムに対して、一つの非完備情報ゲームが定められる。このゲームにおける各プレイヤーの戦略は、 $\sigma_i: \Omega_i \rightarrow B_i$ で与えられる。いま、戦略の組 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ が、ナッシュ均衡であるとは、すべてのプレイヤー i に対して、他のプレイヤーの戦略 $\sigma_{-i}^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*)$ を所与としたときに、いかなる価値 $v_i \in \Omega_i$ が実現しようとも、 $\sigma_i^*(v_i)$ が自らの期待利得を最大化することをいう(以後、単に均衡と呼ぶ)。

2.3 直接メカニズムと顕示原理

上で定義したメカニズムはメッセージの表明によって遂行されるものであるが、メッセージとして特に財の価値が表明されるものを、「直接メカニズム」という。

ところで、制度を設計する者は、制度の帰結がいかなる性質を持つべきかを考え、それを実現させることを目指してルールを策定する。オークションの場合、社会的な余剰の最大化を実現するための効率性や、売り手の期待収入を最大化する収入最適性などを目的として考えることが多い。

そのために、最低売却価格を設定するのか?、複数個の財を同時にオークションにかけるのか?、入札なのかセリなのか? 等々、考えなければいけないことは多数ある。しかし、いずれの場合にも、制度を設計する者の目的を実現するためには、想定した状態が均

³ 「配分」とは、オークションで売買される財が最終的にどのプレイヤー(買い手)に帰属することになるのかを定める関数である。

² 例えば、梶井・松井[3]。

衡として実現されることが肝要である。次に挙げる誘因両立性 (Incentive Compatibility: IC) と呼ばれる概念は、それに関する基本的な要請である。

ICには、「他のすべてのプレイヤーが価値を正直に表明するならば、自分も正直に表明するのが最適になる」という弱い要請と、「他のプレイヤーがどのような価値を表明するかに関わらず、正直に表明するのが最適になる」(戦略的操作不可能性) という強い要請とがあるが、いずれも各プレイヤーが自らの真の価値を表明する誘因を持つことを要請する条件である。この種の性質をオークション・メカニズムが持つべきだと考えられるのは、プレイヤーの虚偽の価値表明に基づく情報の歪みが効率性や収入最適性等の望ましい成果の達成を妨げる可能性があり、そのことを阻止することがICに期待されるからである。

次の定理は、顕示原理と呼ばれており、メカニズムと直接メカニズムの関係を明らかにする重要な定理である。

定理1 (Myerson[8])。メカニズムとその均衡が任意に与えられているものとする。このとき、(1)各プレイヤーにとって自らの価値を正直に表明することが最適で、(2)財の配分と各プレイヤーの支払額が(オリジナル)メカニズムの均衡と等しくなるような均衡をもつ直接メカニズムが存在する。

オークション理論における顕示原理の有用性は、次の二つに集約される。まず、顕示原理によってわれわれはメカニズムの性質等を調べるにあたって、そのメカニズムそのものでなく直接メカニズムを研究すれば十分だということがわかる。とりわけオークションの研究にあたっては、様々なメッセージ空間(戦略空間)を伴う多様なゲームを考えなくても、シグナル空間 $\Pi_{i=1}^n \Omega_i$ を戦略空間とするようなゲームを考えれば十分だということになる。さらに、この定理により、ICを満たす直接メカニズムを考えることの意義が与

えられる。

3. 複数財オークション

3.1 VCGメカニズム

この節では、2つの具体的なオークション・メカニズムを紹介する。例えば公共部門が公共建造物の施工業者を決めるためにオークションを活用する場合など、資源配分の効率性の達成がオークション設計の目標とされることも多い。効率性を実現させるメカニズムとしてよく知られているのが Vickrey-Clarke-Groves (VCG)メカニズムである。

これは、 m 個の財の買い手を決める場合であれば、表明した価値の高い順に m 人に財を与える配分ルールを持ち、各プレイヤーについて、「自分が価値を表明しないと想定した場合に(つまり、自分の財に対する価値が0であると表明した場合に)、財を獲得できるプレイヤー(つまり自分を除いたうち上位 m 番目までの価値を表明するプレイヤー)の価値の合計」と、「自分も価値を表明した場合に財を獲得できる、自分以外のプレイヤーの価値の合計」の差額の支払いを要求する支払いルールを持つ直接メカニズムである。

例えば、同じ財が2個売られるオークションで、買い手が3人いる場合を考えてみよう。プレイヤー1, 2, 3はこの財について、それぞれ10, 7, 4という価値を表明したとすれば、このメカニズムは、財をプレイヤー1と2に与えることを要請する。プレイヤー1の支払額を求めるために、上述の支払いルールに則して、もしプレイヤー1が表明する価値が0であったとすると、プレイヤー2と3が財を獲得することになる。このとき、両者の価値の合計は $7+4=11$ である。一方、プレイヤー1が表明する価値が10である場合、プレイヤー1以外で財を獲得できるのは、価値7を表明したプレイヤー2だけである。先ほどの11からこの7を引いた4が、プレイヤー1の支払うべき金額となるのである。同様に、考えればプレイヤー2の支払額も $14-10=4$ であることがわかる⁴。

ところで、このVCGメカニズムでは、各プレイヤーの支払額は他人が表明する価値の大きさだけに依存し、自分自身の持つ価値の大きさには依存しない。したがって、各プレイヤーは均衡においては正直な表明

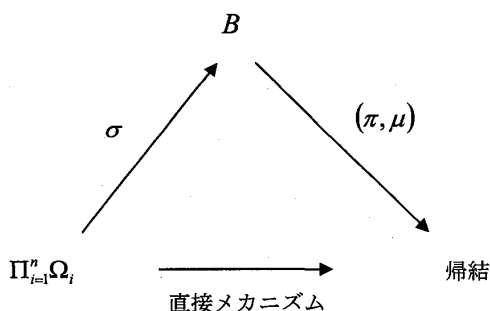


図1 メカニズムと直接メカニズム

⁴ 実際の取引価格の計算にかかる費用の問題など、VCGメカニズムの持ついくつかの問題点については、Milgrom [7]に詳しい。

を行うので、財は実際に高い価値を持つ人々から順に割り当てられていくのである。

財を獲得できなかったプレイヤーは、自分が価値を表明してもしなくても、どちらの場合も自分以外の m 人が勝者になるので、支払い額は 0 である。また財を獲得できたプレイヤーは、自分が表明する価値以上の支払いをすることはない。したがって、このメカニズムにおいては、いかなる価値を表明しようとも、各プレイヤーの期待利得は非負値をとる。この性質を個人合理性 (Individual Rationality: IR) と呼ぶが、人々の自発的な参加のために、オークション・メカニズムが備えているべき性質の一つと考えられることも多い。VCG メカニズムは、効率性および IC, IR を満たすメカニズムの中で、売り手の期待収益を最大化するメカニズムであることも知られている⁵。

単一財のケースを考えれば、この VCG メカニズムは、最も高い価値を持つプレイヤーが財を獲得し、2 番目に高い価値と同額を支払うことになるので、単一財の第二価格式オークションは、この特殊ケースである。ただし、VCG オークションだけが第二価格式オークションの複数財ケースへの一般化になるわけではない。次の 2 つの形で一般化するのも自然なやり方だろう。

つまり、第二価格式オークションの支払いルールにおける「勝者が次点価格を支払う」というアイデアの複数財のケースへの自然な拡張として、VCG オークション以外にも、(1)財を獲得できたすべてのプレイヤーは、獲得できなかったプレイヤーの中で最高の入札額 (m 単位の財が売られるケースでは、 $m+1$ 番目に高い入札額) と同額を支払う、または(2)財を獲得できたプレイヤーは、自分の次に高額な入札額と同額を支払う、といったルールが考えられる⁶。

明らかに、どちらのルールも、単一財のケースでは第二価格式オークションに一致するが、このような支払いルールを持つオークションでは、各プレイヤーは正直な価値の表明を行うのであろうか？ 複数財の場合、均衡におけるプレイヤーの戦略は、この 2 つのオークションでは異なる。後者の場合、自分の真の価値

よりも低めの額の入札をすることで、支払い額を下げるのであり、それに対して、前者では、複数財売られていても買い手はただ 1 財のみを需要するのであれば、正直な価値の表明が均衡となる⁷。

3.2 k -ダブルオークション

前節で紹介した VCG オークションは誘因両立的なメカニズムであったが、次に紹介するのは、市場規模の拡大に伴って、均衡における各プレイヤーの表明額が真の価値に近付いていくケースである。ここでは、売り手と買い手とともに決定するダブルオークションを考える。いま、 n 人の売り手が存在し、各売り手は同質財を 1 単位ずつ保有しているとする。買い手は m 人存在し、各買い手は 1 単位のみ需要しているとする。 $m+n$ 人の全プレイヤーが入札を行い、それを額の低い方から並べ、下から m 番目の入札額を $x_{(m)}$ 、 $m+1$ 番目の額を $x_{(m+1)}$ と書くことにする。制度を設計する者は、事前に $k \in [0, 1]$ を定めておき、 $p^* = (1-k)x_{(m)} + kx_{(m+1)}$ とする。この価格 p^* より低い額を入札した売り手と、 p^* より高額入札をした買い手が価格 p^* で取引を行い、取引を行わないプレイヤーは金銭の授受を行わない、というのがこのオークションの配分および支払いルールである。Rustichini, Satterthwaite and Williams[10] は、このオークションを k -ダブルオークションと呼んだ。少なくとも $x_{(m)} \neq x_{(m+1)}$ であるならば、 p^* 以上を入札した売り手と買い手の合計は n 人である。また、売り手の総数は n 人であるから、 p^* 以上を入札した売り手と p^* 以下を入札した売り手の合計は n 人になる。したがって、このとき p^* 以上を入札する買い手と p^* 以下を入札する売り手の人数は等しくなり、価格 p^* で需給が一致することになる。

オークションにおけるプレイヤーの均衡での戦略的操作、および効率性を考える上で、この k -ダブルオークションは、いくつかの重要な示唆を与えている。先ほどまで考えていた買い手を決めるシングルオークションでは、高い価値を持つ買い手から順番に財を与えることが効率性の条件であったが、ダブルオークションの場合、効率性について若干の留意が必要となる。

⁵ 例えば Krishna[5] の命題 16.2 を参照。

⁶ 前者は、uniform price auction と呼ばれる。後者と同様な考え方が、インターネット広告の広告枠をめぐるオークションで利用されている (Edelman, Ostrovsky and Schwarz[1] および Varian[12])。なお、(1)と(2)のいずれのケースでも、財を獲得できなかった者は支払わない。

⁷ 買い手が同質財を複数個を需要し、その限界効用が通減していく場合、ベクトルとして入札すると、2 単位目以降への入札は、価格への影響を与えてしまう可能性がある。したがって、この場合の均衡では、1 単位目には正直な表明をし、それ以降については、低めの表明をすることが知られている (Krishna[5] 命題 13.4)。

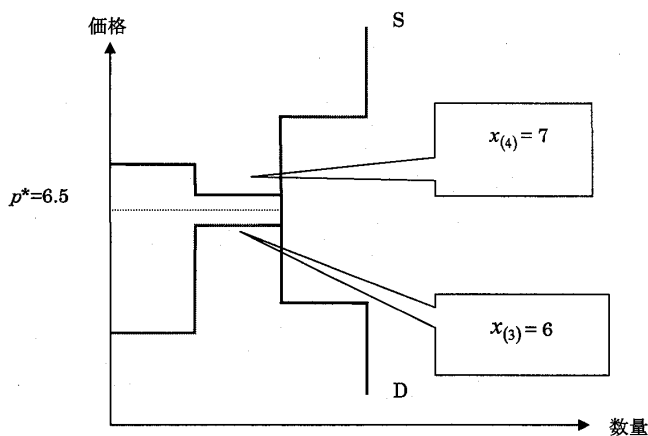


図2 k -ダブルオークションの例： $k=0.5$ ， $m=n=3$ ，売り手の入札額がそれぞれ3，6，9，買い手の入札額が4，7，8のケース

例えば，簡単な例で考えてみよう．(1)全員が正直な表明をした場合に，下から m 番目が売り手 i で，下から $m+1$ 番目が買い手 j だったとしよう．しかし，(2)プレイヤーが何らかの嘘をついて，二人の順序だけが入れ替わり，買い手 i が m 番目に，売り手 j が $m+1$ 番目になってしまったとしよう．

つまり，(1)の場合，正直な表明のもとでは i と j は，互いに入札額の間で p^* が定まるので， p^* より低い入札をした売り手 i と高い入札をした買い手 j は取引をすることができる．しかし，(2)のケースでは嘘がつかれた結果， i と j の順序が入れ替わってしまい， i は p^* より高い入札をした売り手， j は低い入札をした買い手となってしまって，取引ができなくなってしまうのである．すなわち，このケースでは真の価値で評価する限り，買い手 j が売り手 i が持つ財を購入することで，総余剰（社会的余剰）の増加が見込まれるにもかかわらず，嘘の表明の結果，この取引は行われなくなってしまうのである．

シングルオークションの場合は，最低売却価格がなければ，全員が正の値を入札する限り，その場で売られる財はすべていずれかの買い手のもとに渡ることになる．しかし，ダブルオークションの場合は，たとえ買い手が正の値を入札していたとしても，落札できるとは限らない．つまり，取引される財の数が事前に定まらないのである．したがって，ダブルオークションの場合，社会的余剰の最大化という観点に立ったとき，上に述べたような「本来ならば取引されるべき財が取引されなくなる」という形での厚生損失が生じる可能性も否定できないのである．

Rustichini, Satterthwaite and Williams[10]によ

れば，オークション市場への参加者が増加するにつれ，対称均衡においては，

- すべてのプレイヤーの真の価値と表明額の差は0に近づいていく
- 市場の厚生損失の期待値は0に近づいていく

ということが成立する．つまり，市場参加者の増加に伴って，均衡においては，各プレイヤーが虚偽の表明をする余地がなくなり，漸近的に効率性が保たれるというわけである⁸．

また，この k -ダブルオークションをもとに，財の数と同数の，財に対して0の価値を持つ売り手が存在すると考えることで，同様の設定で，再度シングルオークションについて考えることができる．このとき， $k=1$ は第一価格オークションに， $k=0$ のときは第二価格価格に一致することになるが， k の値が，売り手の価格支配力の指標となっている．つまり $k \in [0, 1]$ が大きくなるにつれて買い手の価格に対する影響力は大きくなり，各買い手には，均衡において虚偽の表明を行う誘因が生じるのである． $k=0$ のとき，買い手の価格に対する影響力が失われるということは，第二価格のときに，買い手が正直な表明を行うという既知の結果と一致している．

この場合も，単一財の第一価格および第二価格オークションの場合と同様，リスク中立性などの仮定の下での対称均衡においては， k の値に関わらず，売り手の期待収益は一致することになる．

4. 結語

冒頭で触れたように，資源配分メカニズムの設計にあたって制度を設計する者が考えなければならないことは多岐にわたる．本稿では，配分の効率性および誘因両立性がいかに達成されるかという観点に立って議論を進めてきた．

しかし，周波数市場や卸売り電力市場の設立などの人為的な市場の設立の場合を除けば，現実社会では長い歴史における経験を通じてオークションルールが確立され，市場が運営されてきた．しかも，その種のオークション市場では，例えば一回のオークションにか

⁸ Satterthwaiteらは分布関数にいくつかの仮定をおいていた．多少設定は異なるものの，Peters and Severinov [9]では，より緩い仮定のもとで，同様のインプリケーションを持つ結論が得られた．さらに彼らは，Rustichini, Satterthwaite and Williams[10]では仮定されていた均衡解の存在証明も行った．

かる時間や、取引価格の計算に要する費用などが重視されることも多い。あるいは、例えば築地市場などの魚市場では、セリなのか相対取引なのかなど、魚種ごとに異なるルールや仕組みでオークションが行われることもあり、さらにそれらは時代の要請に応じて幾度かの制度変更を経て現在に至っている。

新たな市場の創設にあたってオークション理論が活用されるのは当然であるが、既存の市場のパフォーマンスの評価や改善などを行うに際しても、オークション理論は有効性を持つであろう。

参考文献

- [1] Edelman, B., Ostrovsky, M. and Schwarz, M.: Internet advertising and the generalized second-price auction: Selling billions of dollars worth of keywords, *American Economic Review*, Vol. 97 (2007), 242-259.
- [2] Janssen, M. C. W. ed.: *Auctioning Public Assets*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [3] 梶井厚志, 松井彰彦: ミクロ経済学戦略的アプローチ, 日本評論社, 2000.
- [4] Klemperer, P.: *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004.
- [5] Krishna, V.: *Auction Theory*, Academic Press, San Diego, CA, 2002.
- [6] McMillan, J.: *Reinventing the Bazaar: A Natural History of Markets*, WW Norton & Co Inc, New York, NY, 2002, (瀧澤弘和, 木村友二訳『市場を創る—バザールから取引まで』, NTT 出版, 2007).
- [7] Milgrom, P.: *Putting Auction Theory to Work*, Cambridge University Press, New York, NY, 2004, (川又邦雄, 奥野正寛監訳, 計盛英一郎, 馬場弓子訳『オークション理論とデザイン』, 東洋経済新報社, 2007).
- [8] Myerson, R. B.: Optimal auction design, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 6 (1981), 58-73.
- [9] Peters, M. and Severinov, S.: Internet auctions with many traders, *Journal of Economic Theory*, Vol. 130 (2006), 220-245.
- [10] Rustichini, A., Satterthwaite, M. A. and Williams, S. R.: Convergence to efficiency in a simple market with incomplete information, *Econometrica*, Vol. 62 (1994), 1041-1063.
- [11] 坂井豊貴, 藤中裕二, 若山琢磨: メカニズムデザイン, ミネルヴァ書房, 2008.
- [12] Varian, H.: Position auctions, *International Journal of Industrial Organization*, Vol. 25 (2007), 1163-1178.