施設容量を考慮した救急医療施設の最適配置

鵜飼　孝盛

近年，少子高齢化の進展などに伴い，医療費・社会保障費の増加が問題となっており，限られた資源を効率的に運用することが望まれている．特に救急医療においては，即時の対応が要求されるが，要求を受けた施設が常に対応可能であるとは限らない．本稿では，施設の容量と需要量によって定まる施設が要求に対応できる確率を考慮し，利用者がサービスを受ける施設までの距離に基づいて，都市内の施設の数やその配置について考察する．

キーワード：施設容量，待ち行列，平均距離，施設配置

1. はじめに

医療技術の進歩や，高齢化の進行などの要因による医療費の増大が問題となっている．同時に，特定の地域における医師不足などの地域医療の空洞化，あるいは崩壊といったことも現実になりつつある．医療への要求が高まるなか，医療に要する費用や医療サービスを提供する医師などの数はにわかに増減させることはできず，限られた資源を効率的に運用することが望まれている．

このように厳しい状況にある医療体制のなかでも，救急医療では治療を開始するまでの時間が生命に直結することも多く，サービスの要請に対して即座に対応することが望まれる．しかし，医療を提供する施設側では，常に要求に応えられるとは限らない．またそのような体制を整備・維持することは困難であり，時には病院間で患者のたらい回しなどといったことがおきる．

限られた予算，人員の制約の下では，施設を集約して，多くの資源を集中的に運用することにより，個々の施設におけるサービスは効率よく提供することが可能となり，上記のようなたらい回しは生じにくくなる．しかし，サービスを享受する側から見ると，集約により施設が少なくなり，施設までの移動に時間がかかってしまうことで，その後の処置に大きな影響が生じる恐れがある．

本稿では，各施設に配分された資源によって定まる医療サービスの効率と，利用者の施設までの移動による負担とに注目し，限られたリソースの適切な配分や最適な医療施設の配置について基本的な特性を探る．

うかい　たかもり
南山大学 数理情報研究センター
〒489-0863 瀬戸市せいれい町27

2. 利用者数の状態

2.1 都市全体の施設利用者の総数

サービスの効率と利用者の移動の両者に注目した分析を行いたいのだが，移動については後で考えるとして，ひとまず限られた領域内での施設利用者の総数がどのようになるか考えよう．

いま都市領域内に，M だけの医師が存在するものとする．都市内に h 個の施設（病院）を考え，各施設に均等に医師が存在するものとする．また，施設あたりの医師数を m とし，$M=mh$ とする．単位時間あたりの都市全体での患者（利用者）の発生率（施設側から見た場合の到着率）を λ，単位医師あたり・単位時間あたりのサービス率を μ で一定であるものと仮定し，到着間隔，サービス時間の分布は指数分布に従うものとする．

このとき，都市全体での医師の総数に応じた mh 次元のベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える．

$$\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_{mh})^T,\ x_i \in \{0, 1\} \tag{1}$$

各 x_i が医師の状態を表し，$x_i=1$ でサービス中，$x_i=0$ で手すきの状態を表すものとする．また，状態 $\boldsymbol{x}$ における医師 i への到着率を $\lambda_i(\boldsymbol{x})$ とし，

$$\sum_{i=1}^{M}\lambda_i(\boldsymbol{x})=\lambda \tag{2}$$

とする．このとき，各状態 $\boldsymbol{x}$ について，以下のような状態方程式が成り立つ．

$$\sum_i\{\mu(1-x_i)+\lambda_i(\boldsymbol{x}[i])x_i\}p(\boldsymbol{x}[i]) = \sum_i\{\mu x_i+\lambda_i(\boldsymbol{x})(1-x_i)\}p(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

ただし，$\boldsymbol{x}[i]$ は $\boldsymbol{x}$ と第 i 成分のみが異なる状態を表すベクトルであり，$p(\boldsymbol{x})$ は状態 $\boldsymbol{x}$ となる確率を表す．

式(3)を利用者数が k である状態 $X_k=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}^2=k\}$ について加え合わせると，$\sum_{x\in X_k}p(\boldsymbol{x})=p(X_k)$ として，以下の平衡方程式が得られる．

$$(k+1)\mu p(X_{k+1})+\lambda p(X_{k-1})=k\mu p(X_k)+\lambda p(X_k) \tag{4}$$

上式より，都市全体における利用者数は，サーバ数 $mh(=M)$，到着率 λ，サービス率 μ の $M/M/mh$ 型の待ち行列となっていることがわかる．

都市全体を一つの施設として考えれば，単純に mh 個のサーバが存在するシステムとして機能すると考えられよう．したがって，都市内での医師の総数が一定であるなら，考えている都市領域内の施設で対応できない確率は一定となる．

2.2 各施設の利用者数

前節では，各施設の利用者数を合計した，都市全体での利用者数の状態について考えた．ここでは，それぞれの施設の利用者数がどのようになるかについて考える．施設数に応じた，h 次元のベクトル $\boldsymbol{u}$ を考える．

$$\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_h)^T,\ u_j=\sum_{i=(j-1)m+1}^{jm}x_i \tag{5}$$

すなわち，$\boldsymbol{u}$ は各施設の利用者数が $u_1,\cdots,u_h$ である状態を表す．また，施設利用者数状態が $\boldsymbol{u}$ である状態 $\boldsymbol{x}$ の集合を $X_{\boldsymbol{u}}=\{\boldsymbol{x}|u_j=\sum_{i=(j-1)m+1}^{jm}x_i(j=1,\cdots,h)\}$，施設利用者数状態 $\boldsymbol{u}$ のときの施設 j への到着率を $\lambda'_j(\boldsymbol{u})$ とし，

$$\sum_{j=1}^{h}\lambda'_j(\boldsymbol{u})=\lambda \tag{6}$$

であるものとする．

このとき，平衡方程式(3)を $\boldsymbol{x}\in X_{\boldsymbol{u}}$ について加え合わせると，

$$\sum_j\{(u_j+1)\mu p(\boldsymbol{u}_j^+)+\lambda'_j(\boldsymbol{u}_j^-)p(\boldsymbol{u}_j^-)\}$$
$$=(n\mu+\lambda)p(\boldsymbol{u}) \tag{7}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{u}_j^+$，$\boldsymbol{u}_j^-$ は，$\boldsymbol{u}$ の第 j 成分が1だけ大きいまたは，小さい利用者数状態を表す．

上の平衡方程式はすべての $\boldsymbol{u}$ について成り立ち，$\boldsymbol{u}$ のとりうる状態の数は，$(m+1)^h$ だけある．$\sum_{\boldsymbol{u}}p(\boldsymbol{u})=1$ の条件の下でこれら $(m+1)^h$ 元の連立方程式を解くことで，確率 $p(\boldsymbol{u})$ が求められる．

3. 線分都市における数値例

3.1 施設が等間隔に存在する場合

長さ $L=10$ の線分状の都市領域を考える．施設数 $h=5$，施設当たり医師数 $m=4$，到着率 $\lambda=15$，医師当たりサービス率 $\mu=1$ とし，需要は最寄りの施設から順に施設を選択するものとする．都市領域の左端を原点とする座標を設け，施設1, …, 5の位置をそれぞれ1, 3, 5, 7, 9とする．

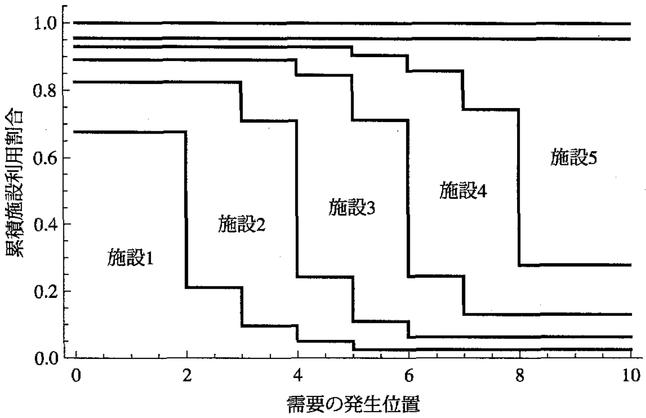

図1 需要の発生位置と施設利用割合

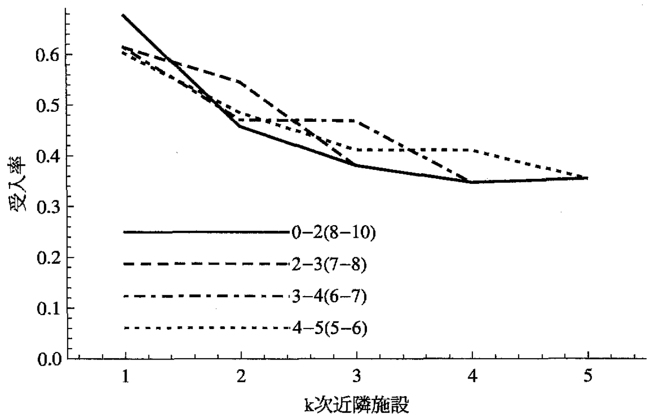

図2 需要の位置ごとの k 次近隣施設の受入率

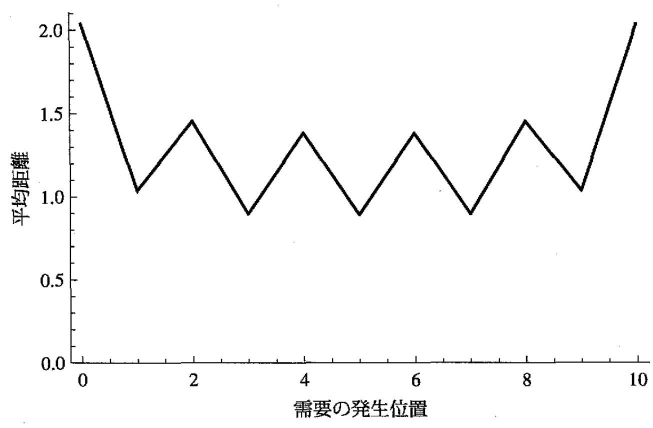

図3 サービスを受ける施設までの平均距離

上記の設定のもとで，式(7)の平衡方程式をつくり，これを解く．このときの需要の発生位置による各施設の利用割合を示したものが図1，各需要が k 次近隣施設を訪れたとき（$k-1$ 次近隣施設まででサービスを受けられないとき），サービスを受けられる確率を示

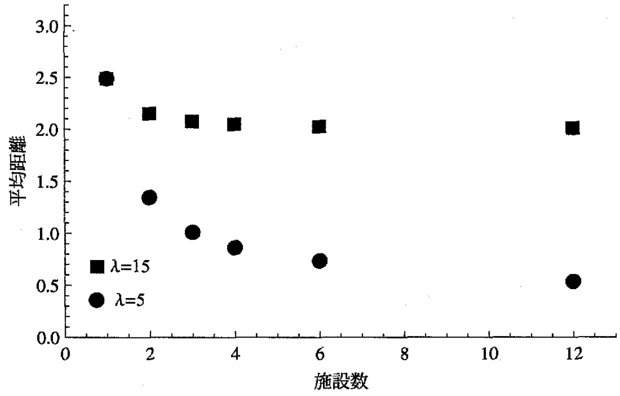

図4　施設数と平均距離

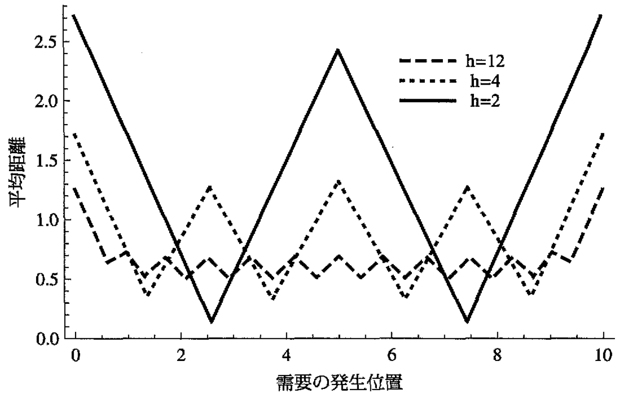

図5　サービスを受ける施設までの平均距離(λ=5)

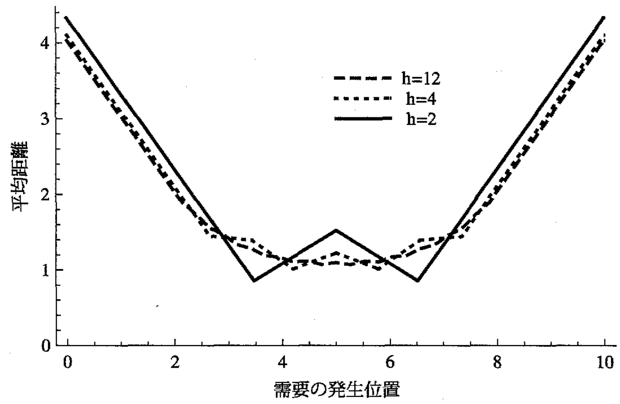

図6　サービスを受ける施設までの平均距離(λ=15)

したものが図2である．需要は近い施設から順に多い割合で利用することとなるが，サービスを受けられないものが一定の割合で存在する．また，施設の受入率は一定とはならず，2次近隣，3次近隣となるに従い，その確率は次第に減少することとなる．

都市内の各地点からサービスを受ける施設までの(領域内のいずれかの施設でサービスを受けられるという条件付きの）平均距離は，図3に示すように，施設の位置で極小，施設間の距離が等しくなる点で極大となり，これらの点で場合分けされる一次関数として表される．

3.2　施設数による最適施設配置の変化

前節では，施設が一次元の線分上に均等に存在するとしたときの，施設の利用割合などについてその特徴を概観した．2.1節で示したように，都市内の医師数が一定のとき，需要が都市内でサービスを受けられる確率は一定となる．この枠組みの中では，都市全体での医療サービスを評価するにあたって，サービスを受ける施設までの距離のみに注目しても問題ないであろう．ここでは，前節と同様に一次元の線分を考え，サービスを受ける施設までの平均距離が最小となる施設の配置について考える．

さて，平均距離を最小化する施設の配置といっても，各需要の施設利用割合などは施設の位置によって変化し，またその値は式(7)の連立方程式を解くことにより求まるため，少々厄介である．そこで，以下のような単純な繰り返しにより，最適施設配置を求めた．

(1) 適当な初期配置を定める．
(2) 各施設への近隣順による都市領域の分割．
(3) 部分領域における施設利用割合の計算．
(4) 各部分領域の施設利用割合による重みづけをした，施設までの距離の総和が最小となるような施設位置の計算．
(5) (2)～(4)を繰り返す．

実際には，初期配置を等間隔として，繰り返しの中で移動距離の総和が最も小さくなる配置を最適配置とした．

前節と同様に，都市領域を長さ $L=10$ の線分とし，医師の総数を $M=12$ として計算を行った．サービス率は $\mu=1$ とし，到着率 $\lambda=5,15$ の2通りについて計算した．図4は施設数と最適配置における平均距離とをプロットしたものである．平均距離は施設数に反比例するように，単調に減少している．また，施設数が同数の場合，$\lambda=15$ の平均距離は常に $\lambda=5$ のときのそれ以上となる．いまサービス率などのほかの条件は一定であり，到着率 λ が大きい場合，それだけ近くの施設が利用できない可能性が大きくなることから，このことは理解できよう．

図5，6は最適配置の場合の，需要の発生地点からサービスを受ける施設までの平均距離を示している．前節で述べたように，それぞれのグラフで極小となっている点に施設は配置されている．到着率 λ が小さ

いときには，領域内に分散して配置するのが最適であるのに対し，λが大きくなると，中心付近に集中的に配置される．λが小さく，サービス率に余裕がある場合には，近くの施設でサービスを受けられないという可能性は小さく，需要の発生位置から最寄りの施設までの距離が重要となり，結果としていわゆるp-メディアン型の配置に近くなる．これに対しλが大きくなり，サービス率に余裕がなくなると，近くの施設でサービスを受けられない可能性も大きくなる．いわゆるたらい回しのような状況が生じやすくなり，需要は最近隣の施設だけでなく，第2次近隣，第3次近隣の施設を利用する割合も大きくなるため集中的な配置となるのである．

施設の側から考えると，到着率が小さい場合には，各施設へ到着する需要は，それぞれの施設が最寄りとなる領域内からのものがほとんどであり，最適な施設の位置は個々の領域内で移動距離を最小にする場所となる．到着率が大きくなると，各施設の利用者は都市領域全体に広がるため，どの施設も都市領域の中心付近が最適な立地場所となり，集中的な配置が得られる．

4. 無限領域における利用確率の近似

これまで見てきたように，都市内の需要がどの施設でサービスを受けるかは，式(7)の連立方程式を解くことによって求められる．しかし，この連立方程式は変数が$(m+1)^h$個存在するため，m，hが比較的小さな値であっても解くのに大変時間のかかるものである．需要がサービスを受ける施設までの平均距離を求めるためには，何番目に近い施設を利用するかという確率がわかればよく，状態$\boldsymbol{u}$となる個々の確率は不要である．そこでここでは，無限に長い直線上に一様に需要，施設が存在する場合に，何番目に近い施設を利用するかという確率の近似を考える．

4.1 任意の施設（群）の利用者数

上記のように，ある需要が何番目に近い施設を利用するかという確率を考えるために，ある特定の施設（群）に着目したときの利用者数について考える．

いま，ある施設iの利用者数がkである状態$\boldsymbol{u}$の集合をU_i^kとする：

$$U_i^k=\{\boldsymbol{u}|u_i=k\} \tag{8}$$

このとき，平衡方程式(7)をU_i^kの範囲で足し合わせ整理すると，

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in U_i^{k+1}}(k+1)\mu p(\boldsymbol{u})+\sum_{\boldsymbol{u}\in U_i^{k-1}}\lambda_i'(\boldsymbol{u})p(\boldsymbol{u})$$

$$=\sum_{\boldsymbol{u}\in U_i^k}(k\mu+\lambda_i'(\boldsymbol{u}))p(\boldsymbol{u}) \tag{9}$$

となり，$\sum_{\boldsymbol{u}\in U_i^k}k\mu p(\boldsymbol{u})=\sum_{\boldsymbol{u}\in U_i^{k-1}}\lambda_i'(\boldsymbol{u})p(\boldsymbol{u})$となるので，

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in U_i^k}p(\boldsymbol{u})=\frac{\sum_{\boldsymbol{u}\in U_i^{k-1}}\lambda_i'(\boldsymbol{u})p(\boldsymbol{u})}{k\mu} \tag{10}$$

という漸化式が得られる．

さらに，いくつかの施設の集合$I=\{i_1,\cdots,i_a\}(i_j\in\{1,\cdots,h\},a\leq h)$に対し，その利用者の合計が$k$となる確率は，

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in U_I^k}p(\boldsymbol{u})=\frac{\sum_{\boldsymbol{u}\in U_I^{k-1}}\Lambda_I(\boldsymbol{u})p(\boldsymbol{u})}{k\mu} \tag{11}$$

という漸化式であらわすことができる．ただし，$\Lambda_I(\boldsymbol{u})=\sum_{i\in I}\lambda_i'(\boldsymbol{u})$である．

4.2 無限領域における利用確率の近似

無限に長い直線上に需要が一様に存在し，施設は直線上に等間隔に配置されている状況を考える．単位長さあたりの発生率をλ，施設密度をhとし，領域上の任意の位置からみた最近隣，第2次近隣，$\cdots$，第t次近隣の施設の集合を$I(t)$とする．このとき，式(11)が成り立つ．$I(t)$を第s次近隣とする領域のうち，状態$\boldsymbol{u}$のとき$I(t)$を訪れる領域の集合$R_s(\boldsymbol{u})$とする．部分領域rの大きさを$L(r)$とすると，発生率は一定でλであるので，ある領域rで発生する需要の到着率は$\lambda L(r)$と表される．さて，領域$r\in R_s(\boldsymbol{u})$で，$I(t)$を訪れるのは，最近隣，第2次近隣，$\cdots$，第$s-1$次近隣の施設が利用できないときである．そのような状態$\boldsymbol{u}$の集合をΩ_{s-1}^rとすると，式(11)の右辺の分子は，

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in U_{I(t)}^{k-1}}\Lambda_{I(t)}(\boldsymbol{u})p(\boldsymbol{u})=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r\in R_s}\lambda L(r)p(U_{I(t)},\Omega_{s-1}^r) \tag{12}$$

となる．ここで，

$$p(U_{I(t)},\Omega_{s-1}^r)\simeq p(U_{I(t)}^{k-1})\cdot p(\Omega_{s-1}^r)$$

とする．このとき，$p(\Omega_s^r)$が領域rによらないと考えられ，また施設の配置が領域内で等間隔であるという仮定より，ある施設が第s次施設となる領域の大きさの合計は一定となると考えられる．このことを考慮して，式(11)を整理すると，

$$p(U_{I(t)}^k)=\frac{a_t}{k}p(U_{I(t)}^{k-1})=\frac{a_t^k}{k!}p(U_{I(t)}^0)$$

$$a_t=\frac{\lambda}{h\mu}\left(t+\sum_{s=1}^{\infty}p(\Omega_s)\right) \tag{13}$$

を得る．上式で$k=tm$とすると，$I(t)$に属するすべての施設，すなわち任意の需要の最近隣から第t次近隣の施設が利用できない確率$p(\Omega_t)$となり，

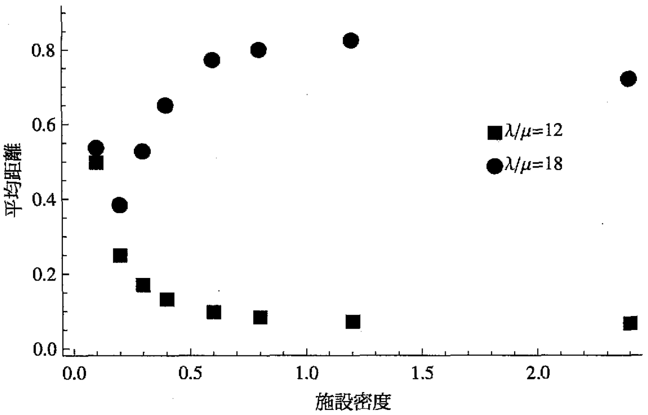

図7　無限平面における施設密度と平均距離

$$p(\Omega_t)=\frac{a_t^{tm}/(tm)!}{\sum_{k=0}^{tm}a_t^k/k!} \tag{14}$$

を得る.

4.3　数値例

無限平面における施設密度と平均距離をプロットしたものを図7に示す. 医師密度は2.4とし, 到着率とサービス率の比は$\lambda/\mu=12, 18$とした.

到着率とサービス率の比λ/μが小さい場合, 施設密度に反比例するように平均距離は減少している. しかし, λ/μが大きくなると, 平均距離はある密度で極小の値をとっている. 3節の線分状の都市における数値例と同様に, サービス率に余裕がある場合には, 近くの施設でサービスを受けられない確率は小さく, 施設は分散して配置される. これに対し, サービス率に余裕がない場合には, サービスを受けられない可能性が大きくなるため, ある程度規模の大きな施設を設けることにより, その割合を減じることが求められる.

5.　おわりに

各施設に資源が配分された状況で, 医療サービスを提供できる確率を考慮し, 需要がサービスを受ける施設までの距離を基に, 施設数や配置について考察した. 大雑把で単純な分析であるが, 以下のような知見を得ることができた.

3節の線分状の都市における例では, サービスを受ける施設までの平均距離は, 施設数に関して単調に減少し, サーバに余裕がある場合には分散して, サーバに余裕がない場合には集中して配置することが最適であることを示した. このことは, できる限り多くの施設を設けることの利点を意味するが, 現実には無限に施設を増やすことはできない. 確かに平均距離自体は減少することとなるが, 施設数が多くなるとその値には大きな差はなくなることからも, 施設の建設にかかる費用などを考慮した分析が必要となろう. また, ここでは他の都市への移動を考慮しておらず, 都市内でサービスを受けられなかった場合は呼損として取り扱っている. 4節では, 無限に広い領域を考えており, 上記のような呼損は生じず, サーバと到着率の関係次第で移動距離を最小にする施設数にも違いがあることを示した.

参考文献

[1] O. Berman and R. C. Larson: Optimal 2-facility network districting in the presence of queuing, *Transportation Science*, 19, pp. 261-277, 1985.
[2] 栗田　治: 都市施設の適切な数に関する数理モデル—政令指定都市の区数に関する分析例—, 日本建築学会計画系論文集, 524, pp. 169-176, 1999.
[3] 宮川雅至, 大澤義明, 腰塚武志: 施設の開設・閉鎖に伴う移動距離変化と頑健な規則的配置, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, 47, pp. 1-16, 2004.
[4] 森村英典, 大前義次: 応用待ち行列理論, OR ライブラリー 18, 日科技連出版社, 1975.
[5] 岡部篤行, 鈴木敦夫: 最適配置の数理, 朝倉書店, 1992.
[6] 大澤義明: 待ち行列を用いた行政サービス割り当て問題について, 日本都市計画学会学術研究論文集, 20, pp. 109-114, 1985.
[7] 鵜飼孝盛: 呼損を伴う都市施設の適正な施設数, 日本オペレーションズ・リサーチ学会2009年春季研究発表会アブストラクト集, pp. 158-159, 2009.