多目的施設配置モデル
—公平性と利便性とを同時に扱う—

大澤　義明

施設配置モデルの新しい潮流として，客の利便性と客相互の公平性を同時に考える多目的計画の研究が盛んになっている．ここでは，連続平面上の1施設配置を多目的凸計画問題の枠組みで定式化する．客から施設への移動費用が直線距離の二乗に比例するという想定の下で，必ずしも両立しない公平性と利便性とを俎上にのせるのである．この問題に対して計算幾何学的にアプローチすることによって，パレート最適配置が明示されることに，今回の内容の実践的意義がある．

1. 多目的施設配置モデルとは

計算幾何学の進展もあり，多くの既存モデルを特別な場合とする順序メディアン立地問題が最近集中的に研究されている．さらに現場の要請から，多くの判断基準を組み込む多目的立地問題に関する研究も増えている．以下では，連続平面上の1施設配置を順序メディアン立地モデルとして多目的凸計画問題の枠組みで定式化する．特に，施設との移動費用として直線距離の二乗を用い，必ずしも両立しない公平性と利便性とに関するパレート最適配置をボロノイ図を活用することにより，幾何学的に示す．なお，詳しい内容については，文献[4]を参照してほしい．

2. 一目的配置

利用者集合 I の場所 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$ に対し，施設位置 $\boldsymbol{x}$ を求める問題を考える．最初に，公平性を取り扱う施設配置モデルとして，**絶対格差最小化問題**を考える：

$$\min_x F(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \left| \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}_i\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}_j\|^2 \right|. \qquad (1)$$

この目的関数は，利用者各ペア間の移動費用格差の総合計を表しており，$F(\boldsymbol{x})$ が小さいほど利用者格差が狭いという考え方である．ピグー－ドルトン条件を満たすという優れた特徴を保持している．目的関数は区分的に線形な凸関数となる．

利便性の指標として，**k-セントラム問題**を考える：

$$\min_x G^k(\boldsymbol{x}) \equiv \max_{\bar{I} \subseteq I, |\bar{I}|=k} \left(\sum_{i \in \bar{I}} \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}_i\|^2 \right). \qquad (2)$$

目的関数は，施設から遠い k 人の移動費用の合計で定義される．$k=n$ ならば，利用者全員の移動費用総合計を最小化する，ウエーバー問題に帰着する．$k=1$ ならば，最も遠い利用者の移動費用を最小化する，ミニマックス問題となる．目的関数は区分的に二次の凸関数となる．

図1に計算例を示す．$n=5$ の利用者分布に対し，問題(1)の最適点 $\boldsymbol{f}^*$ および問題(2)の最適点最適点 $\boldsymbol{g}_k^*$ を示す．なお，$\boldsymbol{g}_1^* = \boldsymbol{g}_2^*$ となる．

3. 二目的配置：公平性 vs 利便性

公平性と利便性との対立構造を踏まえながら，施設立地場所 $\boldsymbol{x}$ を決めたい．絶対格差最小化問題(1)と k-セントラム問題(2)とを同時に取う，次の**二目的最適化問題**を定式化する：

$$\min_x \{F(\boldsymbol{x}), G^k(\boldsymbol{x})\} \qquad (3)$$

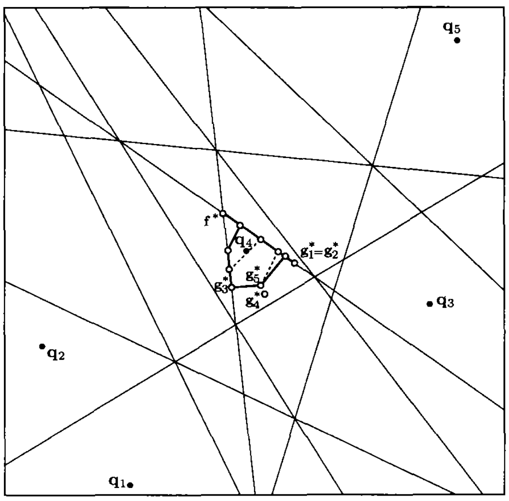

図1　利用者分布および一目的最適配置

おおさわ　よしあき
筑波大学 システム情報工学研究科
〒305-8573 つくば市天王台 1-1-1

ボロノイ図を活用した解法を以下に示す．

1) $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$ の順序付きボロノイ図を作成する．
2) 問題(1)および(2)の最適点 $\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{g}_k^*$ を求める．
3) 順序付きボロノイ図の辺集合 ∂V を抽出する．
4) 各順序付きボロノイ領域内において，その順序で計算される重心から $F(\boldsymbol{x})$ の法線ベクトルでその領域を通過する部分の集合を L とする．
5) グラフ $\partial V \cup L$ 上において，$\boldsymbol{f}^*$ から $\boldsymbol{g}_k^*$ への最急降下パスを求める．

図1の中心部分を拡大した図2に，$k=1$，$k=3$，$k=5$ に対応するパレート最適 $\boldsymbol{P}_{01}^*$，$\boldsymbol{P}_{03}^*$，$\boldsymbol{P}_{05}^*$ を太線にて示す．$\boldsymbol{P}_{01}^*$ は $\boldsymbol{f}^*$ と $\boldsymbol{g}_1^*$ とを結ぶ直線となる．$\boldsymbol{P}_{03}^*$ は $\boldsymbol{f}^*$ から $\boldsymbol{t}$ および $\boldsymbol{r}$ を経由し $\boldsymbol{g}_3^*$ を結ぶ折れ線となる．$\boldsymbol{P}_{05}^*$ は $\boldsymbol{f}^*$ から $\boldsymbol{v}$ を通り $\boldsymbol{g}_5^*$ とを結ぶ．そして，パレート最適点という合理的な施設配置場所が，公平性から利便性を優先するにつれて，この折れ線上で $\boldsymbol{f}^*$ から $\boldsymbol{g}_k^*$ へ移動するのである．

4. 多目的配置：面的拡大

k-セントラム問題(2)を利用して利便性だけを追求する，次の**三目的最適化問題**のパレート最適配置を求める：

$$\min_{\boldsymbol{x}}\{G^1(\boldsymbol{x}), G^3(\boldsymbol{x}), G^5(\boldsymbol{x})\} \tag{4}$$

パレート最適配置 $\boldsymbol{P}_{135}^*$ は，パレート最適 $\boldsymbol{P}_{13}^*$，$\boldsymbol{P}_{35}^*$，$\boldsymbol{P}_{15}^*$ で囲まれた領域で定まる．なお，$\boldsymbol{P}_{13}^*$，$\boldsymbol{P}_{35}^*$，$\boldsymbol{P}_{15}^*$ は，上記の方法において L の計算を少し修正すれば求められる．図2に，パレート最適 $\boldsymbol{P}_{135}^*$ を示す．3本の曲線で定まるので，パレート最適は濃い陰影を施した面 $\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{g}_1^*$ とを結ぶ一本の線分から構成される．

次に，利便性重視の三目的最適化問題(4)を基軸に，対立軸として公平性最適化問題(1)を取り込んだ，**四目的最適化問題**を解く：

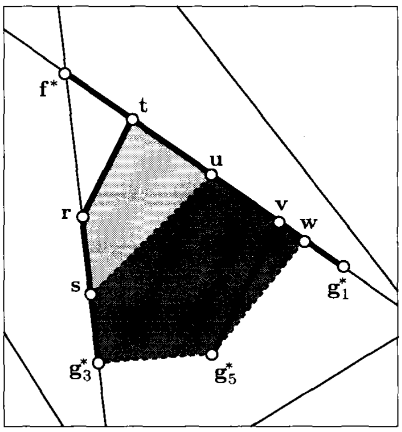

図2 パレート最適配置

$$\min_{\boldsymbol{x}}\{F(\boldsymbol{x}), G^1(\boldsymbol{x}), G^3(\boldsymbol{x}), G^5(\boldsymbol{x})\} \tag{5}$$

四目的最適化問題(5)のパレート最適配置 $\boldsymbol{P}_{0135}^*$ は，考えられる三目的最適化問題の組み合わせの和集合で与えられるから，領域 $\boldsymbol{P}_{135}^*$ と3本の線分 $\boldsymbol{P}_{01}^*$，$\boldsymbol{P}_{03}^*$，$\boldsymbol{P}_{05}^*$ で囲まれた領域で定まる．したがって，$\boldsymbol{P}_{0135}^*$ は，パレート最適 $\boldsymbol{P}_{135}^*$ に淡い陰影部分と $\boldsymbol{f}^*$ と $\boldsymbol{t}$ とを結ぶ一本の線分が追加された領域で与えられる（図2）．

このように，考慮すべき指標が多くなれば，パレート最適の領域も拡大していく様子が読み取れる．また，三目的によるパレート最適 $\boldsymbol{P}_{135}^*$ と比較し，拡大する領域を明示することにより，格差是正の影響も地理的に確認することができる．

5. 現実への適用と一般化に関する注意

現実の施設計画では，一本の指標ではなく複数本の指標で評価するのが通常である．単一指標ならば数値の大きさだけで配置を評価できるが，複数指標になった瞬間，総合的という言葉の下で評価が曖昧となってしまうことも少なくない．そこで複数の指標を合理的に考え，想定できる代替案集合を示すパレート最適集合が必要となってくる．パレート最適の考え方を今後浸透させることが大切であろう．

なお，二目的パレート最適配置に関しては，目的関数が必ずしも凸とはならない場合[1][3][5]，メトリックが異なる状況[2]，利用者階層が複数ある場合[3]が考察されている．

参考文献

[1] Y. Ohsawa, Bicriteria Euclidean location associated with maximin and minimax criteria, *Naval Research Logistics*, 47, 581-592 (2000).

[2] Y. Ohsawa and K. Tamura, Efficient Location for a Semi-Obnoxious Facility, *Annals of Operations Research*, 123, 173-188 (2003).

[3] Y. Ohsawa, F. Plastria and K. Tamura, Euclidean push-pull partial covering problems, *Computers and Operations Research*, 33 (12), 3566-3582 (2006).

[4] Y. Ohsawa, N. Ozaki, F. Plastria and K. Tamura, Quadratic ordered median location problems, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 50 (4), 540-562 (2007).

[5] Y. Ohsawa, N. Ozaki and F. Plastria, Equityefficiency bicriteria location with squared Euclidean distances, *Operations Research*, 56 (1), 79-87 (2008).