

# 離散断面積を持つ構造物の最適設計

勝見 佑平

(東京大学工学部計数工学科 現所属・同大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻)

指導教員 寒野善博 准教授

## 1. はじめに

建築、機械、航空工学などの分野において、構造物を合理的に設計することは重要であり、最適設計の研究が盛んに行われている。しかし、既往の手法の多くは局所最適解を求めるものである。本論文では、離散構造物のトポロジー最適化問題をグランドストラクチャ法に従って定式化し、大域的最適解を求める手法を提案する。グランドストラクチャ法とは、十分に多くの部材からなる初期構造物を用意し、各部材断面積を変数として最適化問題を解き、断面積が0となった部材を取り除くことで部材の接続関係(トポロジー)を変化させる手法である。節点に作用する荷重によって生じる応答量に関する制約条件の下で、部材の総体積が最小になるトポロジーと、断面の形状寸法を求めることが目的である。荷重に対する応答量には、節点の変位、部材応力、振動数などが挙げられるが、本研究では部材応力に関する制約を考える。

構造物としてトラス構造物、骨組構造物の2種類を扱う。トラスの場合は部材に軸力しか作用しないので、設計変数は断面積のみを考慮する。一方、骨組の場合には曲げ変形も生じるため、変数として断面2次モーメント、曲げ方向の断面直径を追加する。本研究ではこれらの変数を離散変数、すなわち、あらかじめ与えられた集合の要素のみをとり得る変数として扱う。設計変数を離散変数として扱うことによる利点として、工学的には規格に合わせて断面の寸法を設定できること、数学的には混合整数線形計画問題(MILP)に帰着でき、大域的最適解を得られることが挙げられる。設計変数を連続変数として扱う場合、応力制約の下での最適設計問題は非凸な非線形計画問題となる。

先行研究として、Bollapragada et al. [1], Rasmussen and Stolpe[2]が挙げられるが、両研究ともトラスの場合のみを扱っている。本研究では先行研究の定式化の短所を明らかにして改良し、さらに骨組の最適設計問題に拡張する。

## 2. 先行研究の定式化の改良

部材  $i$  の  $p$  番目の断面積の候補を定数  $A_{ip}$  ( $p=1, \dots, P$ ) として与える。Rasmussen and Stolpe[2]は離散断面積の制約  $A_i \in \{A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{iP}\}$  を、部材  $i$  の断面積が  $A_{ip}$  であるときに1、そうでないときに0をとる0-1変数  $x_{ip}$  を用いて実現し、トラスの最適化問題をMILPに定式化した。この定式化に関して本論文では、0-1変数  $x_{ip}$  を実数緩和した際、冗長で、かつ元の問題の実行可能領域と比較して非常に弱くなってしまう制約が存在することを示し、それらの制約をより強く、少ない制約に置き換え可能であることを示した。部材総数を  $I$ 、断面の種類総数を  $P$ 、節点変位の自由度を  $J$  とすると、文献[2]による定式化では制約条件が  $4IP+I+J$  個あるが、この改良により  $2IP+3I+J$  個と約半分になる。

Bollapragada et al. [1]はトラスの最適化問題をMLLP (Mixed Logical Linear Programming) に定式化した。応力制約には「断面積が0となる部材に対しては制約を課さない」という難しい問題点がある。文献[1]では断面積に正の小さな下界を与えており、この問題点を考慮していない。このため図1に例を示す通り、正しい最適トポロジーが得られない場合がある。一方、問題のサイズが断面の種類数  $P$  によらないという利点があるので、本研究では利点を保ちつつ応力制約の問題点を解決する方法を示した。図1は同じ体積最小化問題を扱った例である。左側の図は文献[1]の定式化によるもので、目的関数値が12,318、右側の図が本研究の定式化によるもので、目的関数値が

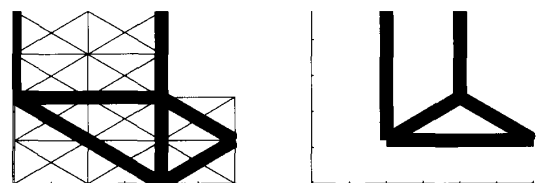


図1 最適トポロジーの比較

8,799 である。

### 3. 骨組の最適化問題への拡張

文献[2]のトラスに対する定式化を骨組の最適化問題に拡張する。トラスの場合、部材には伸びしか生じないので、軸方向のみの応力制約を考えるが、骨組の場合には部材に生じる曲げの影響も考慮しなければならない。そこで軸力-曲げモーメント相関降伏条件を制約条件とする。力の釣り合い、軸力-曲げモーメント相関降伏条件を記述するための設計変数は、断面積  $A_i$  に加え、断面 2 次モーメント  $\mu_i$ 、曲げを考慮する方向の断面直径  $d_i$  が必要である。骨組の場合の離散断面の制約は  $(A_i, \mu_i, d_i) \in \{(A_{i1}, \mu_{i1}, d_{i1}), \dots, (A_{ip}, \mu_{ip}, d_{ip})\}$  となる。2 節に示した 0-1 変数  $x_{ip}$  を用いてこの制約を実現することで、鋼管、H 型鋼など全く異なる形の断面を同時に候補とすることが可能となる。

骨組のトポロジー最適化問題は以上の方法で MILP として定式化可能であり、2 節に示した MILP の改良を適用すると以下ようになる：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^I l_i \sum_{p=1}^P A_{ip} x_{ip}, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i,p} (A_{ip} \beta_{i1} v_{ip1} + \mu_{ip} \beta_{i2} v_{ip2} + \mu_{ip} \beta_{i3} v_{ip3}) = f, \\ & |v_{ip1}| + \frac{12|\mu_{ip}|v_{ip2}}{l_i d_{ip} A_{ip}} + \frac{2|\mu_{ip}|v_{ip3}}{d_{ip} A_{ip}} \leq x_{ip} v_i^u, \\ & \forall (i, p), \\ & \left| \sum_{p=1}^P v_{ipk} - b_{ik} u \right| \leq M_k (1 - \sum_{p=1}^P x_{ip}), \quad \forall (i, k), \\ & \sum_{p=1}^P x_{ip} \leq 1, \quad \forall i, \\ & x_{ip} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, p). \end{aligned}$$

変数は  $x_{ip}, v_{ip1}, v_{ip2}, v_{ip3}, u$  である。目的関数は部材総体積を表す。制約条件は順に力の釣り合い、軸力-曲げモーメント相関降伏条件、適合条件を表し、最後の 2 つが離散断面を実現する制約である。

### 4. 数値実験

数値実験では、(i)分枝限定法アルゴリズムの比較、(ii)2 節に示した MILP の改良の効果の検証、(iii) MILP と MLLP の定式化の比較、(iv)規格表を用いた 5 層 3 スパンの骨組構造物の最適設計の 4 点を主に扱った。

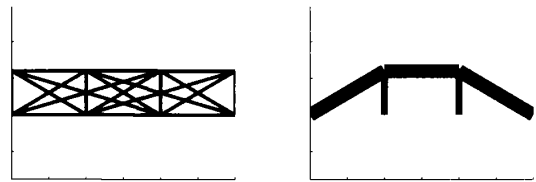


図 2 左：初期構造 右：最適トポロジー

表 1 計算時間 [s]

P	CPLEX		提案手法	
	改良前	改良後	改良前	改良後
5	37.31	23.36	13.41	8.08
10	1820	531.4	177.7	78.20
20	*	*	1929	431.7

ここでは 20 部材骨組構造物を用いて (i), (ii) に対する実験の一例を示す。初期構造 (図 2) の下段中央の 2 つの節点に荷重を与える。表 1 に最適解の求解に要した時間を示す。「CPLEX」は CPLEX ver. 11.2 の MIP のソルバーによるものであり、「提案手法」は先行研究の深さ優先探索のアルゴリズムにヒューリスティクスを加え改良したものを MATLAB で実装し、緩和問題 (LP) の求解には CPLEX ver. 11.2 を用いて解いたものである。表中の \* は 2,000 [s] で計算打ち切を示す。また P は断面の種類数である。

(i) に関して、表 1 は提案手法の CPLEX に対する優位性を示している。この例に反して、部材総数がより大きい場合の実験では CPLEX の方が計算効率が良い場合が多い。(ii) に関しては  $P \geq 5$  のほとんどの場合で計算時間の短縮が確認できた。表 1 の結果はその一例である。

### 参考文献

- [1] S. Bollapragada, O. Ghattas and J. N. Hooker: Optimal design of truss structures by logic-based branch and cut, *Operations Research*, Vol. 49, No. 1, 42-51 (2001).
- [2] M. H. Rasmussen and M. Stolpe: Global optimization of discrete truss topology design problems using a parallel cut-and-branch method, *Computers & Structures*, Vol. 86, 1527-1538 (2008).