

固定費を有する確率計画問題の 電源計画への応用

椎名 孝之

確率計画法においては、制約侵犯への罰金（リコース関数）を含む費用の期待値を最小化するという2段階決定モデルがある。決定変数に整数条件を有するとき、罰金を表すリコース関数は、非凸関数になるため従来L-shaped法を用いることはできない。本稿では電源計画への応用を考慮して、第2段階の決定変数が正の値をとる場合に罰金を要する確率計画問題を取り扱い、分枝カット法による解法を示す。

キーワード：確率計画法、分枝カット法、電源計画

1. はじめに

現実の数理計画問題は、不確実要素を伴う場合が多い。不確実な状況下での最適化を取り扱う手法は、確率計画法と呼ばれている[2][6]。確率計画法には、制約侵犯への罰金に対する償還請求（リコース）を含む費用の期待値を最小化するというアプローチがあり、Bendersの分解に基づくL-shaped法による解法が知られている[11]。本稿では、リコース変数に0-1変数を含む2段階確率計画問題を考える。第1段階変数の中に整数条件を含む問題[4][5]とは異なり、第2段階以降の変数に整数条件を有する問題は、非常に困難なものとなる。従来の単純リコース型のモデル[1]においては、第2段階でとりうるリコース変数の値が非負整数に限られるため必ずしも実用的でない。本稿では第2段階のリコース変数が正の値をとる場合に、同時に正の罰金を要する確率計画問題を考える。

2. 固定費を含む確率計画問題

固定費を含む確率計画問題（SPFCR: stochastic programming with fixed charge recourse）を次のように定義する。 $m_1 \times n_1$ 次元行列 A 、 n_1 次元列ベクトル c 、 m_1 次元列ベクトル b 、 $n_2 \times n_1$ 次元行列 T は確定値として与えられている。これらに関連する n_1 次元変数ベクトル x は、第1段階変数とよばれる。同様に n_2 次元列ベクトル q, f も確定値として与えられ

ており、 $f > 0$ 、 $q > 0$ と仮定する。 n_2 次元列ベクトル $\tilde{\xi}$ は確率変数であり、その台を Ξ とし、 ξ を $\tilde{\xi}$ の実現値とする。

(SPFCR):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x + Q(x) \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b, x \geq 0 \\ & Q(x) = E_{\tilde{\xi}}[Q(x, \tilde{\xi})] \\ & Q(x, \xi) = \min\{q^\top y(\xi) + f^\top z(\xi)\} \\ & y(\xi) \geq \xi - Tx, \\ & 0 \leq y(\xi) \leq Mz(\xi), \\ & z(\xi) \in \{0, 1\}^{m_2}, \xi \in \Xi \end{aligned}$$

n_2 次元変数ベクトル $y(\xi)$ および $z(\xi)$ は、第2段階変数とよばれ、確率変数 $\tilde{\xi}$ のとる値 ξ に応じて決定される。第2段階変数 $y(\xi)$ は非負であり、 $z(\xi)$ は0-1変数である。定数 M は十分に大きい正数である。罰金を表すリコース関数 $Q(x, \xi)$ を決定する混合0-1整数計画問題は第2段階問題とよばれる。ここで、第1段階変数として新たな変数 $\chi = Tx$ を定義すると、問題（SPFCR）は次の（SPFCRT）に変形できる。変数 χ は入札変数（tender variable）と呼ばれる。

(SPFCRT):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x + \Psi(\chi) \\ \text{s. t.} \quad & Ax = b, x \geq 0 \\ & \chi = Tx \\ & \Psi(\chi) = E_{\tilde{\xi}}[\phi(\chi, \tilde{\xi})] \\ & \phi(\chi, \xi) = \min\{q^\top y(\xi) + f^\top z(\xi)\} \\ & y(\xi) \geq \xi - \chi, \\ & 0 \leq y(\xi) \leq Mz(\xi), \\ & z(\xi) \in \{0, 1\}^{n_2}, \xi \in \Xi \end{aligned}$$

新たなリコース関数 $\phi(\chi, \xi)$ は、 χ の関数であり、次

しいな たかゆき
千葉工業大学 社会システム科学部
〒275-0016 習志野市津田沼 2-17-1

のように χ の成分ごとに分離可能である。

$$\begin{aligned} \psi(\chi, \xi) &= \sum_{i=1}^{n_2} \psi_i(\chi_i, \xi_i) \\ \psi_i(\chi_i, \xi_i) &= \min\{q_i y_i(\xi_i) + f_i z_i(\xi_i) \mid \\ & y_i(\xi_i) \geq \xi_i - \chi_i, \\ & 0 \leq y_i(\xi_i) \leq M z_i(\xi_i), z_i(\xi_i) \in \{0, 1\}\} \end{aligned}$$

本稿では、 ξ の各成分 $\xi_i (i=1, \dots, n_2)$ は有限な離散分布に従うものと仮定し、 ξ_i の台と実現値をそれぞれ $\Xi_i, \xi_i^s (s=1, \dots, |\Xi_i|)$ と表す。また、 $\xi_i = \xi_i^s$ となる確率を p_i^s とする。

3. 分枝カット法のアルゴリズム

問題 (SPFCRT) は2段階の最適化を含むため、直接解くことはできない。そのため、第 i リコース関数の期待値 $\Psi_i(\chi)$ を近似する変数 θ_i とその下界制約を導入した線形計画問題 M_0 を解く。

$$\begin{aligned} (M_0): \\ \min c^T x + \sum_{i=1}^{n_2} \theta_i \\ \text{s. t. } Ax = b, Tx = \chi, x \geq 0 \\ \theta_i (i=1, \dots, n_2) \text{ の下界制約} \end{aligned}$$

図1に $p_s=1/4 (s=1, \dots, 4), \Xi = \{1, 2, 3, 4\}, q=2, f=4$ のときのリコース関数の期待値 $\Psi(\chi)$ と下界を示す。線形計画問題 M_0 の最適解を (x^*, χ^*, θ^*) とする。このとき $1 < \chi^* < 2$ であれば、 $\theta^* < \Psi(\chi^*)$ となるため、問題 M_0 を子問題 M_1, M_2 に分解する。

分枝カット法においては、変数 χ のとりうる値の区間が分割される。新たに生成された問題 M_1 においては最適性カット (optimality cut) が加えられており、 $1 \leq \chi < 2$ においてリコース関数に対する正確な近似となる。子問題への分割でこのような区間が少なく

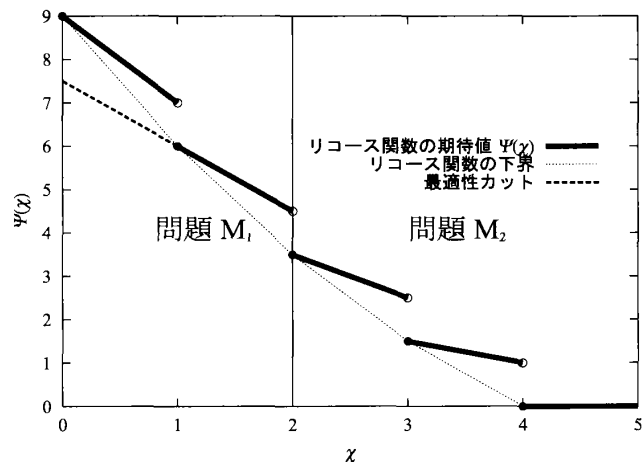


図1 分枝カット法による問題の分解

とも一つ増加する。よって、 ξ の各成分の最大値が有限であり、さらにとりうる値の総数も有限であるとき、分枝が無限に繰り返されることはないため、アルゴリズムは有限回の反復で終了する。

4. 電源計画への応用

電気事業においては、電力需要などの不確実性を考慮し、経済的な電源供給を計画することが求められている[7]~[9]。不確実な将来の電力需要に対して、各種発電方式によって電力供給を計画する。各種方式は、経済性、供給安定性などが異なるため、どのような容量と発電方式の発電設備をいつ建設するかを、主に経済性から検討することが問題となる。計画の経済性を示す費用は、発電設備を所有するために必要な固定費、および発電に要する経費からなる。

電源計画においては、電力需要の値は年間の各時間における負荷を大きさの順に配列して得られる負荷持続曲線あるいはその線形近似が用いられている。この需要に対して、既存の n_1 個の発電設備と新設の n_2 個の設備により供給を行うものとする。負荷持続曲線を図2においては、 $n_2=3$ の領域に分割し、領域 $j (j=1, \dots, n_2)$ の需要量を確率変数 ξ_j 、持続時間を t_j と定める。

第2段階での固定費を新設設備の導入費用と定義し、問題 (SPFCRT) を電源計画に適用すると次の問題 (PGP) が得られる。

定数 a_{ij}, r_i をそれぞれ、設備 i の領域 j における燃料消費率、設備 i の燃料費とすると、設備 i の領域 j における発電費用は $c_{ij} = a_{ij} t_j r_i$ となる。定数 b_i は既設設備 i の燃料消費の上限を表す。第1段階変数 x_{ij} は設備 i の領域 j における出力を表す。第2段階問題における q_j, f_j は新設設備 j の発電費用および導入費用を表す。第2段階変数 $y_j(\xi_j^s), z_j(\xi_j^s)$ は、領域 j における需要が ξ_j^s となる場合の新設設備 j の出力および、導入の決定を表す。

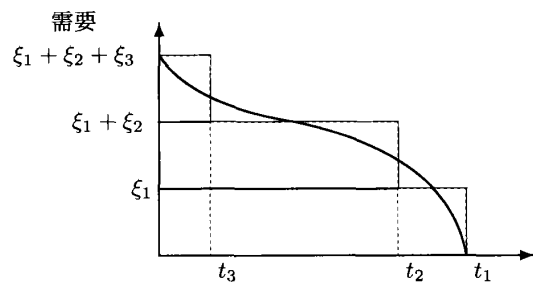


図2 負荷持続曲線

(PGP) :

$$\min \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} c_{ij} x_{ij} + \Psi(\chi)$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^{n_2} a_{ij} x_{ij} \leq b_i, i=1, \dots, n_1$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1, \dots, n_1, j=1, \dots, n_2$$

$$\chi_j = \sum_{i=1}^{n_1} x_{ij}, j=1, \dots, n_2$$

$$\Psi(\chi) = \sum_{s=1}^{|\Xi_1| \times \dots \times |\Xi_{n_1}|} p^s \psi(\chi, \xi^s)$$

$$\psi(\chi, \xi^s) = \sum_{j=1}^{n_2} \psi_j(\chi_j, \xi_j^s),$$

$$s=1, \dots, (|\Xi_1| \times \dots \times |\Xi_{n_1}|)$$

$$\psi_j(\chi_j, \xi_j^s) = \min\{q_j y_j(\xi_j^s) + f_j z_j(\xi_j^s) |$$

$$y_j(\xi_j^s) + \chi_j \geq \xi_j^s$$

$$0 \leq y_j(\xi_j^s) \leq M z_j(\xi_j^s)$$

$$z_j(\xi_j^s) \in \{0, 1\},$$

$$s=1, \dots, |\Xi_j|, j=1, \dots, n_2$$

分枝カット法 (BC) のアルゴリズムを ILOG OPL Development Studio によって実装した。分枝カット法においては、ILOG CPLEX の線形計画法ソルバを用いた。本手法に対する比較として、問題 PGP の等価確定問題に対する分枝限定法 (BB) の適用を行った。分枝限定法には、ILOG CPLEX の混合整数計画

法ソルバを用いた。分枝カット法と分枝限定法の両者における列挙木上の問題選択には、奥行優先則を適用した。詳しい条件は文献[10]を参照されたい。

本節で扱った問題は 10, 15, 20 の需要帯域を有し、10 設備による電力供給を仮定している。各需要帯域にはそれぞれ、10, 15, 20 のシナリオを与えられている。表 1 に数値実験の結果を示す。表中の *OPT*, *UB*, *LB* はそれぞれ、最適目的関数値および、その下界値と上界値を表す。下界値は問題 M_0 を解くことによって得られる。上界値は近似解法 DSSP (dynamic slope scaling procedure) [3] によって得られた値である。

DSSP による解法はすべて 1 秒以内で終了しているが、上界と下界のギャップ $\frac{UB-LB}{LB}$ は厳密解法で得られる $\frac{OPT-LB}{LB}$ よりも大きい。分枝カット法 (BC) における生成された子問題数は、分枝限定法 (BB) の子問題数よりも非常に少なく、計算時間もほぼすべてが短く抑えられている。需要帯域数と各シナリオ数が多い場合 ($n_2 \geq 15, |\Xi_i| \geq 15$), 分枝限定法によって生成された子問題数は分枝カット法を大きく上回るため、分枝カット法の効率が非常に良いことがわかる。この理由は次のように考えられる。分枝限定法 (BB) で

表 1 計算結果

需要帯域数	シナリオ数 $ \Xi_i $	固定費比率 f_i/q_i	$\frac{UB-LB}{LB}$		DSSP	計算時間 (sec)		子問題数	
			(%)	(%)		BC	BB	BC	BB
10	10	500	5.42	4.27	0.32	2.43	1.56	338	1454
10	10	1000	7.65	6.08	0.32	1.59	1.81	219	1442
10	10	1500	9.59	7.71	0.32	2.31	3.28	328	3348
10	15	500	3.95	2.16	0.50	4.36	15.10	449	12003
10	15	1000	6.60	4.74	0.50	3.36	24.01	395	17054
10	15	1500	8.05	6.26	0.52	4.72	16.22	560	11402
10	20	500	3.78	2.27	0.20	3.63	75.45	474	26927
10	20	1000	6.39	5.19	0.73	6.99	82.42	705	36550
10	20	1500	7.83	6.23	0.75	8.52	205.82	870	98307
15	10	500	3.48	2.87	0.45	8.12	31.62	811	26687
15	10	1000	4.38	3.64	0.46	5.67	73.07	578	44444
15	10	1500	5.01	3.71	0.48	7.86	52.53	793	35499
15	15	500	3.14	2.83	0.28	21.74	1182.05	789	492685
15	15	1000	3.11	2.53	0.73	14.60	718.30	1245	281900
15	15	1500	5.60	4.71	0.25	10.95	1084.13	1009	377704
15	20	500	1.67	1.21	0.31	13.39	3878.72	1117	1019114
15	20	1000	3.18	2.53	0.32	9.16	2901.50	756	657882
15	20	1500	5.37	4.56	0.28	8.90	3191.11	742	709039
20	10	500	2.71	2.34	0.35	10.80	223.78	836	158993
20	10	1000	4.21	3.23	0.32	20.36	36.22	1583	21119
20	10	1500	5.63	4.72	0.31	9.77	56.40	745	32604
20	15	500	2.09	1.74	0.37	27.04	4279.36	1952	1313029
20	15	1000	3.74	3.03	0.39	17.61	1328.03	1256	423012
20	15	1500	5.07	4.03	0.37	40.70	1427.94	2784	345240
20	20	500	1.67	1.37	0.38	204.46	-	13005	-
20	20	1000	3.80	3.10	0.37	135.27	-	8771	-
20	20	1500	4.73	3.90	0.38	49.03	-	3232	-

空欄 (-) は計算時間 10000 秒以内に計算が終了しなかったことを示す。

生成される子問題の数の上界は、問題に含まれる 0-1 変数の総数が $\sum_{j=1}^{n_2} |\Xi_j|$ であるため、 $O(2^{\sum_{j=1}^{n_2} |\Xi_j|})$ となる。同様に、分枝カット法 (BC) で生成される子問題の数の上界は各変数 $x_i (i=1, \dots, n_2)$ が高々 $|\Xi_j|+1$ 個の区間に分割されるため、 $O(\prod_{j=1}^{n_2} |\Xi_j|)$ となる。したがって、 $n_j=10$ かつ $|\Xi_j|=10$ の場合、(BB) により生成される子問題数の上限は $2^{10 \times 10} \approx 1000^{10}$ となる。一方、(BC) によると 10^{10} であるため、(BB) と比較すると子問題数の上界値は非常に小さくなる。

5. おわりに

本稿では、固定費を有する確率計画問題に対して分枝カット法に基づく厳密解法を示し、電源計画への有効性を示した。このモデルは、幅広い分野の問題への応用が可能である。

参考文献

- [1] S. Ahmed, M. Tawarmalani and N. V. Sahinidis, A finite branch-and-bound algorithm for two-stage stochastic integer programs, *Mathematical Programming*, **100**, 355-377 (2005).
- [2] J. R. Birge and F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer-Verlag, 1997.
- [3] D. Kim and P. M. Pardalos, A solution approach to the fixed charge network flow problem using a dynamic slope scaling procedure, *Operations Research Letters*, **24**, 195-203 (1999).
- [4] G. Laporte and F. V. Louveaux, The integer L-shaped method for stochastic integer programs with complete recourse, *Operations Research Letters*, **13**, 133-142 (1993).
- [5] T. Shiina, L-shaped decomposition method for multi-stage stochastic concentrator location problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **43**, 317-332 (2000).
- [6] 椎名孝之, 確率計画法, 応用数理計画ハンドブック (久保幹雄, 田村明久, 松井知己編) 第 13 章, 朝倉書店, 710-769 (2002).
- [7] 椎名孝之, 電気事業への確率計画法の応用, 知能と情報, **16**, 528-539 (2004).
- [8] T. Shiina and J. R. Birge, Multi-stage stochastic programming model for electric power capacity expansion problem, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **20**, 379-397 (2003).
- [9] T. Shiina and J. R. Birge, Stochastic unit commitment problem, *International Transactions in Operational Research*, **11**, 19-32 (2004).
- [10] T. Shiina, Y. Tagaya and S. Morito, Stochastic programming with fixed charge recourse, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **50**, 299-314 (2007).
- [11] R. Van Slyke and R. J.-B. Wets, L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic linear programs, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **17**, 638-663 (1969).