グラフ・ネットワーク・OR

根本　俊男

オペレーションズ・リサーチで利用される代表的な手法のひとつであるグラフ論・ネットワーク計画，そして，組合せ最適化の技術を利用した問題解決へのアプローチ方法を枝巡回路問題を用いて紹介し，オペレーションズ・リサーチが持つ有用性を専門的な知識を持たない初学者向けに伝えたい．

キーワード：グラフ論，ネットワーク計画，組合せ最適化，最短路，枝巡回路

1. はじめに

我が家のゴミ出しの話である．毎週月曜日と木曜日は可燃ゴミ，火曜日は資源ゴミ（または不燃ゴミ），水曜日はお休みで，金曜日はプラスチックゴミと，平日の朝はゴミを出すのが大切な作業になっている．毎朝のゴミ出しは（私にとっては）大変だが，出されたゴミの回収も本当に大変そうに見える．ここでは，この日常生活の中でよく見るゴミ回収の風景を，グラフ論やネットワーク計画と呼ばれる技術を通じてオペレーションズ・リサーチの観点から眺めてみたい．

2. 戸別回収のルート

私が住む市では資源ゴミ以外のゴミは，ゴミ集積所やごみステーションといった地域の特定の場所ではなく，自分の家の軒先に出すことになっている．その結果，指定された曜日の朝にすべての家の軒先に家庭ゴミの袋が出る．その出されたゴミ袋をゴミ回収車と作業員が街のすべての家を周り回収している．この方式は**戸別回収**と呼ばれている．

戸別回収では，回収車が道路をゆっくり走りながら，道の両脇に置かれたゴミ袋を作業員が小走りで集め載せていく．時々，すでに回収済みの道にぶつかり，作業員が回収車に乗って移動していく．この回収作業をしない単なる移動（**回送**と呼ぶことにする）は無駄に見える．この回送について街の構造を見ながら考えてみたい．

図1はある住宅街の様子である．ニュータウン等でよく見かける地区内の生活道路と大通りに出る接続道路で構成された街のようだ．この街に入ってきたゴミ回収車は生活道路部分を走りながら道の両脇にあるゴミを回収しなくてはならない．回収車の移動の手間を減らすにはどのようなルート（経路）をたどるべきだろうか．ここで手間とは，ゴミ回収車の総走行距離と捉えることとする．

2.1 ルート決定に必要な情報の選択

図1のような地図は街の様子を視覚的に把握するには良い道具だ．しかし，ゴミ回収ルートを考えるには不要な情報が多すぎる．例えば，道の曲がり具合や家の形などはルート選択には不要だ．逆にルートを考えるのに必要な情報は，道の分岐やつながり方，そして，長さであろう．そこで，ルートを考える際に必要な情報を太線や数値で書き込んでみた（図2）．ここで，公園周りの道は複雑だが，家がなくゴミは出ないので，回収車にとっては単なる通過地域にすぎない．公園周りはひとつの分岐点として大胆にまとめて捉えてみよう．各分岐点には v_1，v_2，v_3，v_4 と名前を付けた．

図2で書き込んだ部分を図3に書き出してみた．道の分岐を**点**（●）で，道を線（これを**枝**と呼ぶ）で，

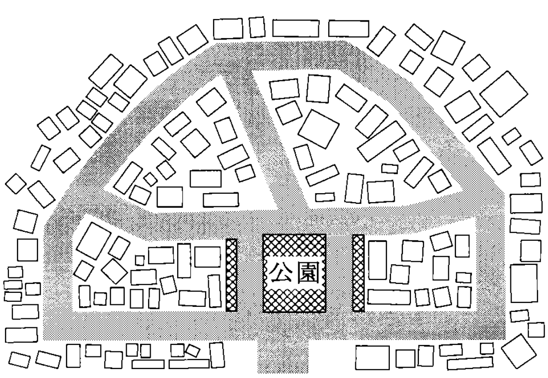

図1　ある住宅街の道路（灰色部分）と家（四角）の様子

ねもと　としお
文教大学 大学院情報学研究科
〒253-8550 茅ヶ崎市行谷1100

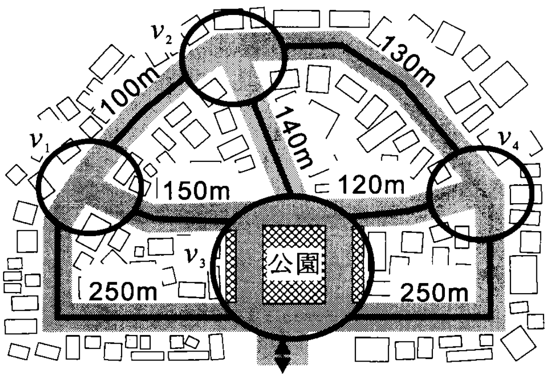

図2　ルートを考える際に重要な情報（太線）

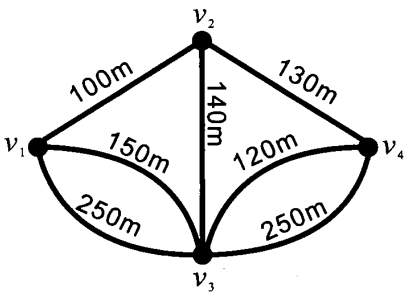

図3　ルート決定に必要な情報のネットワーク表現

そして，道の長さを枝の横に数値で付している．ここで，公園周りの分岐は面積が広いのに他の点と大きさが同じだとか，長さの異なる道が同じくらいの長さで描かれているなどを気にしてはいけない．不要な情報を遠ざけ，必要な情報を独立に抽出することが科学的な問題解決では重要なコツなのだ（しかし，意外とこれを実践することは難しい．この話はこの程度で）．

必要な情報のみを抽出すると図3のように問題の舞台が骨組みだけで表現できる場合がある．このように，点とその点間を結ぶ枝で描かれた骨組みを**グラフ**と呼ぶ．さらに，描かれたグラフの点や枝に数値などの情報が付け加えられたものを**ネットワーク**と呼ぶ．図3は，ネットワークの例にもなっている．

2.2　無駄のないルート探し

まずは，回収車のルートで無駄のない，つまり回送なしで街全体のゴミ回収が可能かについて検討しよう．もしそのようなルートがあるとしたら，図3の上では，そのルートは点 v_3 から始まり，点 v_3 で終わる一筆書きになっているはずだ．つまり，ここでは，図3で与えられたグラフは一筆書き可能かを尋ねていることになる．元はゴミ回収経路を見つける問題だが，一筆書きの問題でもあったようだ．

さて，図3の上で鉛筆や指を少し動かしながら考えてもらうと一筆書きは難しいと感じてくるかもしれない．ただ，できないと感じるだけでは解決にはならない．できないのなら，自分の努力が足りないのではなく，だれがやってもできない理由を示してもらえると後に続く同じことを考える人々に有益である．実は，一筆書きの可否をグラフの点に接続している枝の数（**次数**と呼ぶ）の偶数・奇数に注目することで判断することができる．なぜなら，ひとつの点に注目すると，一筆書きは注目した点に入って出るという2本の枝を通る動きを何度か経て構成され，すべての枝を1度通るなら，次数は2本の倍数，つまり偶数となるはずだからだ（図4）．図3のグラフをみると，4つの点とも次数は奇数なので一筆書きはできない．つまり，無駄のないルートは探しても見つからないが答えとなる．

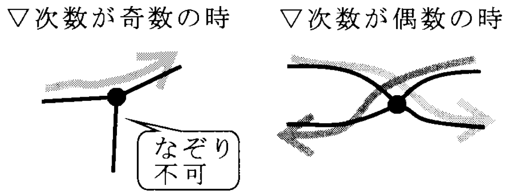

図4　点の次数が奇数のときと偶数のとき

ところで，次数が奇数の点があると（開始点に戻ってくるというルールでの）一筆書きはできないことを示したが，すべての点の次数が偶数なら一筆書き可能なのだろうか．必ずしも自明ではないのだが，この問いには数学者のオイラーが「可能」であることを示した．この結果は，グラフに関する研究（**グラフ論**）の始まりともいわれている．

2.3　無駄の少ないルート探し

無駄のないルート探しは徒労に終わることがわかった．そこで次に，次善策の無駄の少ないルート探しに話題を変えよう．つまり，回送は許すがその総回送距離は少なくしたいという問題になる．

この回送を許す場合も一筆書きの知識が役に立つ．なぜなら，ゴミ回収車は空を飛べないので，回送時も道を走りその経路は1本の線（一筆書き）になっているはずだからだ．つまり，回送した部分を枝として付け加えたグラフは一筆書き可能なグラフになっているはずである．この特徴を逆に利用し，すべての点の次数が偶数になるよう適切に枝を加え，一筆書きできる状態（すべての点の次数が偶数の状態）にすることで，ゴミ回収車のルートを暗に決定できることになる．なお，付け加えた枝が回送部分に対応しており，枝の追加は回送の増加を意味するので，総距離が少ない枝の追加がよいことに注意が必要である．

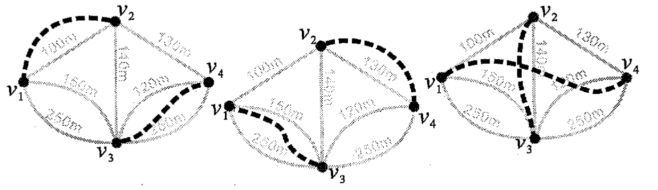

図5　マッチング（破線部）のすべてのパターン

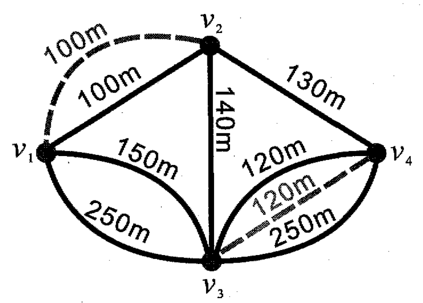

図6　付加した枝（破線）の総距離が最小で一筆書き可能な状態

グラフ上で次数が奇数の点は（いつでも）偶数個存在する．点を共有しないよう次数が奇数である適当な2つの点の間に枝を加えることですべての点の次数を1ずつ増やし，結果的に次数を偶数に変えることができる．ここで枝を加えるとした点を共有しない2点のペアの集合は**マッチング**と呼ばれる．図3ですべての点の次数を1ずつ増やし偶数にするために加えるべきマッチングのすべてのパターンは，$\{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$, $\{(v_1, v_3), (v_2, v_4)\}$, $\{(v_1, v_4), (v_2, v_3)\}$ の3パターンである（図5）．

各パターンでの回送距離の合計は，100＋120＝220(m)，150＋130＝280(m)，230＋140＝370(m)と算出できるので，最も総回送距離を少なくするマッチングのパターンは$\{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$となり，220(m)を回送するルートが存在することが分かる．図6は，図3に回送する部分の枝（破線の枝）を加えたグラフだ．一筆書きができる，つまり，ゴミ回収ルートを作ることができることを確認しよう．この図6のグラフから導かれる一筆書き（回収ルート）は複数パターン存在するが，例えば，最も無駄の少ない具体的な回収ルートは図7のように提案できる．

3.　解きたい問題から現れてくる別な問題

前節で手間の少ないゴミ回収ルートを見つけることができた．ここでは，この見つけるまでの過程をもう一度見直し，ゴミ回収ルート決定の問題に潜んでいた解き方に工夫が必要な別の問題に目を向けたい．

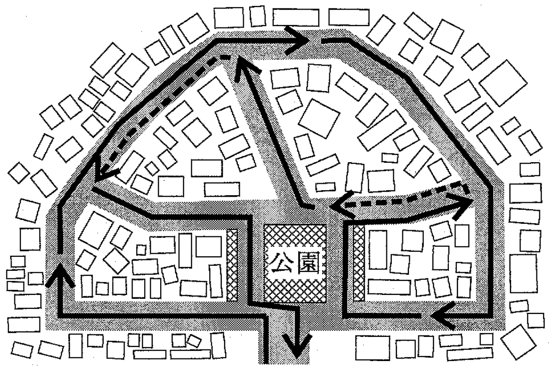

図7　最も無駄の少ない戸別回収ルートの一例（破線：回送区間）

3.1　マッチング

まず回送距離最小となる回送パターンを見つける場面では，可能性のあるすべての回送パターンを列挙し比較した．ここではグラフの（奇）点数が4点で3パターンの列挙だったが，6点だと15パターン，8点だと105パターンと列挙すべきパターン数はどんどん増える．グラフの点数がさらに増えていくと，この列挙すべきパターン数は急激に大きくなる．急激に大きくなるといってもイメージが難しいと思う．例えば，日本語での数の最大の単位である無量大数を使っても表現できない数字が登場したり，高速コンピュータを利用しても列挙に数万年という膨大な時間を費やすといったイメージである．要は「可能性すべてを探って，一番良いものを見つける」という素朴な一番探しの方法では時間がかかり過ぎ手に負えない．この現象は**組合せ的爆発**と呼ばれる．

すべての回送パターンを列挙し最良を見つけるとの手段をとることは一般的に困難なので，列挙を回避し回送距離最小のパターンを知りたいとの欲求が自然と生まれてくる．その欲求は，枝に付した数値の合計を小さくする最大マッチングの発見とも捉えられるので，ネットワーク上では**最小重み最大マッチング問題**と名付けられている．ゴミ回収経路の問題には別な問題が潜んでいたようだ．この最小重み最大マッチング問題に対しては，運の良いことに，列挙をせずに欲するマッチングを見つける方法が知られている[1][2]．

3.2　2点間の最短路

次に，2点間で回送する（枝を追加する）ときにその最短距離を導く必要があった点に話題を移そう．例えば，$\{(v_1, v_4), (v_2, v_3)\}$に枝を追加するパターンの場合に，点$v_1$と点$v_4$間の最短の回送距離を230(m)と算出した．この点v_1から点v_4への（同じ枝を通らな

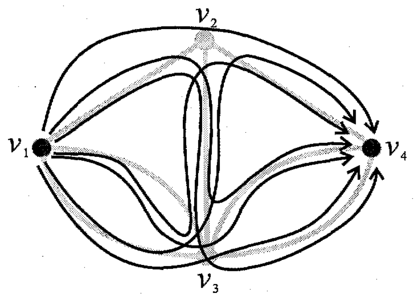

図8　点 v_1 と点 v_4 間のすべてのルート（7ルート）

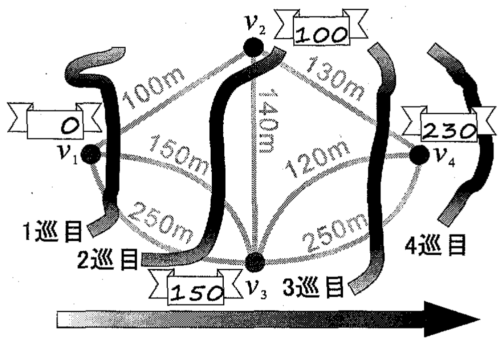

図9　点 v_1 から徐々に最短距離を見つける様子

い）ルートは7パターンあり（図8），この中から各経路の総距離を比較して，最短の回送距離として230(m)という情報を把握していた．

ただし，グラフの点数や枝数が多くなるとルートのパターン数は急激に増え，組合せ的爆発を起こすことが知られている．そこで，図8のようにルートをすべて列挙をしないで2点間の最短距離を見つけたいとの自然な欲求が出てくる．ここでも潜んでいた問題が姿を現してきたようだ．この欲求にこたえる方法の一つとして，2点間の一方からもう一方へ向かい徐々に最短距離を把握する方法が知られている．例えば，点 v_1 から点 v_4 への最短距離を徐々に把握する方法を次で紹介しよう．

まず，各点に看板を置き，点 v_1 の看板にのみ0と数字を鉛筆で書き込もう．次に，鉛筆書きの看板の数字の中から数字が最小の看板を選び，マジックで消えないように書き直す．そして，「マジックで今書き込んだ数字とその点から出ている枝の数字の和」と「枝の先の看板の数字」を比較する．もし，枝の先の看板に何も書かれていない，または，より大きな数字が書いてあった場合は，看板に「マジックで今書き込んだ数字とその点から出ている枝の数字の和」を鉛筆で書き換えよう．ちなみに，マジック書きした看板は書き換えられることはない．これをすべての点の看板がマジックで書かれるまで繰り返す（図9）と，すべてのパターンを列挙せずに点 v_1 からの最短距離が求められる．この方法は**ダイクストラ法**という名称で知られている[4]．

ここでのネットワーク上である点からある点までの最短距離を求める問題は**最短路問題**と呼ばれている．最短路問題は効率性に関わる多くの問題に潜んでいる．例えば，ゴミ回収車がゴミでいっぱいになったらゴミ焼却炉に向かうだろう．その際にゴミ焼却炉までの最短のルートを見つけたいときもこの最短路問題が出現する．そう考えると，車のナビゲーションシステムも，電車の乗換案内も，この最短路問題が関わっていることがわかる．最短路問題がネットワーク上に起こる様々な問題の基盤的な問題の一つになっていると感じられる．

4.　様々な舞台への展開とその基盤

ここでは戸別回収を行うゴミ回収車の動きに関して，舞台となっている街をグラフやネットワークで表現し，その上での最適化問題を解くことにより総走行距離が最小になる効率のよい経路が提案できることを紹介した．ゴミ回収車の経路はグラフ上の枝すべてを巡回しているので**枝巡回路問題**と，または郵便配達人の配達経路を求める問題として紹介された経緯から**郵便配達人問題**と呼ばれる問題として一般的には知られている．

ここで紹介した私の住む市のゴミ回収車が最適経路を実際に辿っているかについては実態を調査していないので不明である．しかし，最適なゴミ回収経路の提案はゴミ回収費用の圧縮につながると推測でき，行政のコスト削減に寄与するであろう．その裏付けとして，実際にここでのアプローチや亜種が適用され効果を挙げている次のような例も報告されている[1]．

- ニューヨーク市やワシントンD.C.での道路清掃
- ケンブリッジ市やニューヨーク市でのゴミ収集
- インディアナでの道路の除雪と凍結防止作業
- スクールバスの経路
- 電気・ガスメーターの検針

枝巡回路問題を取り上げた入門書[2]を受けた，雪上車の除雪計画[3]も興味深い記事である．道や通路など線上移動に意味がある状況を思い浮かべれば，大型スーパーでの清掃作業経路や巨大美術館での見学経路の設計などにもここでの知識が利用できそうだ．オペレーションズ・リサーチのひとつの技術を身につけるだけで，様々な舞台での展開が考えられることが分かる．

ところで枝巡回路問題を解くには，最短路問題や最小重み最大マッチング問題といったネットワークの上で設定可能な問題が基盤にあった．最短路問題やマッチングに関する問題は，それ自身が応用例を多く持つ問題でもある．それに加えて，他の実用の問題の中での基盤的な問題として利用されることが多く，さらにオペレーションズ・リサーチの基盤を形成している問題群ともいえる．これらの問題群は**ネットワーク計画**や，さらには**組合せ最適化**，**離散最適化**とさらに広いイメージの分野名の下で学問体系ができ，オペレーションズ・リサーチの技術基盤を支えている．

5. おわりに

さて，オペレーションズ・リサーチは様々な分野での問題に対して解決作業の手助けをする技術群といえる．きっと役に立つ技術である．しかしながら，時代の変化で廃れる技術もよく目にするので，10年後も役に立つかなど時間を意識した観点は重要である．そこで時間を意識し始めると，今すぐ役に立てたい技術と，比較的長い時間で役に立たせたい技術はその特徴が異なることに気が付く．前者の場合は具体的な問題が背景にある場合が多いので，抱えている問題に特化した技術を探し出し学ぶのがよい．入門書を読むよりはオペレーションズ・リサーチの専門家を探しすぐに相談したほうが効率的だろう．オペレーションズ・リサーチに詳しい知り合いを持つことは重要そうだ．

後者の場合は，時代の変化で廃れない（廃れにくい）技術群を自分で身につけることが重要となる．時代が大きく変化しても金づちやノコギリといった単純な機能の道具が人類に変わらず使用されてきたとの歴史をかんがみると，問題解決での頑健な技術群とは比較的単純な設定の問題とそれらに対する基本的な解決技法群のはずだ．オペレーションズ・リサーチはバランスよくそれらを提供しているので，時代が多少変化したとしても今後も役に立つ学問分野といえる．入門書から，または，大学・大学院といった教育機関でオペレーションズ・リサーチを学ぶことは，息の長い知的道具を手に入れることにつながる．ただし，役に立つものを手に入れたからといって役に立たせることができるとは限らない．それを役に立たせるかどうかは，それを使う人間の創造力次第である．身につけた学問を役に立たせるためには，自分自身をさらに磨き，問題解決への意識を高く保つことが大切であろう．

6. 追伸

今日もゴミ回収車がやってきた．ただ今日は回収の様子に違いを感じた．ゴミ回収車は我が家の前の通りに入ってこない．20メートルほど離れた近くの交差点に止まり，回収車から作業員が走ってきた．そして，我が家と近所の軒先からゴミ袋を手早く集め交差点に戻り回収車に積み，我が家の前の道を通らずに別な方向に去っていった．ゴミ回収車は必ずしも街のすべての道を通る必要はないと気付かされた瞬間であった．作業員が運べる範囲なら回収車が家の前を通る必要はないようだ．さて，この設定での最適なゴミ回収経路はどのように見つければよいのだろうか．ここからがオペレーションズ・リサーチの醍醐味であろう．楽しもう．

参考文献

[1] 久保幹雄, 田村明久, 松井知己編：応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店 (2002).

[2] 久保幹雄, 松井知己：組合せ最適化［短編集］, 朝倉書店 (1999).

[3] 前田英次郎：除雪―南国育ち, 雪国に戸惑う―, オペレーションズ・リサーチ, 50, 251-254 (2005).

[4] 松井泰子, 根本俊男, 宇野毅明：入門オペレーションズ・リサーチ, 東海大学出版会 (2008).