線形計画問題：物資の輸送を例として

池辺　淑子

いくつかの１次等式や不等式の制約の下，１次関数を最適化する線形計画問題は数理計画におけるもっとも基本的な問題である．本稿ではものの輸送を取り上げ，輸送費用を最小化する問題が線形計画問題として定式化される過程や線形計画の基本的な性質を初学者向けに紹介する．

キーワード：数理計画，線形計画，輸送問題，最小費用流問題

1. はじめに

数理計画について学ぶとき，線形計画問題は最初に登場する，もっとも基本的な問題である．線形計画問題は記述が簡単な上に応用の幅が非常に広く，理論的にも実用的にも数理計画分野の礎をなすものである．本稿では，ある程度の現実性があり，線形計画問題としての記述が比較的簡単である物資の輸送の問題を取り上げ，定式化の部分を中心に紹介する．また，線形計画のもっとも重要な性質である双対性と相補性，それらを用いた解法についてもごく簡単に触れる．

2. 輸送問題

全国にいくつかの倉庫をもつ紙の販売業者が，いくつかの印刷工場から上質紙の注文を受けたとしよう．受けた注文の総量はすべて倉庫にある在庫量で賄えるとして，どの倉庫からどの印刷工場にいくら運べば輸送コストが最小になるかを求めたい．

倉庫の数を m，印刷工場の数を n，倉庫 i の上質紙の在庫量を a_i トン $(i=1, \cdots, m)$，印刷工場 j の注文量を b_j トン $(j=1, \cdots, n)$ とする．総注文量は総在庫量以下という前提なので，

$$b_1+\cdots+b_n \leq a_1+\cdots+a_m$$

が成り立つ．倉庫から工場へ紙を運ぶ際の輸送コストは，厳密には使用するトラックの台数なども関わるが，少し目をつぶり，倉庫 i から印刷工場 j へ紙を運ぶ際，1トンあたりにかかるコストは c_{ij} 万円で固定されていると仮定する $(i=1, \cdots, m, j=1, \cdots, n)$．このとき，

いけべ　よしこ
東京理科大学 工学部経営工学科
〒162-8601 新宿区神楽坂 1-3

倉庫 i から印刷工場 j へ運ぶ上質紙の量を x_{ij} トンとすれば，$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{mn}$ を以下の条件が満たされるように決めればよい（図１参照）．

(a) 倉庫 i から運び出される上質紙の総量は在庫量を超えない $(i=1, \cdots, m)$

(b) 印刷工場 j に運び込まれる上質紙の総量は注文量に等しい $(j=1, \cdots, n)$

(c) 輸送量 $x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{mn}$ はすべて0以上

(d) 輸送にかかる総コストが最小

条件(a)については，

$$x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in} \leq a_i \quad (i=1, \cdots, m) \tag{1}$$

と記述でき，同様に(b)については

$$x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{mj}=b_j \quad (j=1, \cdots, n) \tag{2}$$

と書ける．また，倉庫 i から工場 j への輸送コストは1トンあたりの費用 c_{ij} と輸送量 x_{ij} の積であるから，輸送にかかる総コストは

$$c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{mn}x_{mn} \tag{3}$$

である．したがって，$x_{11}, \cdots, x_{mn}$ を，(1)と(2)および $x_{11}, \cdots, x_{mn} \geq 0$ が成り立つ下で(3)が最小になるように定めればよい．すなわち，以下の数理計画問題を解けばよい．

最小化　$c_{11}x_{11}+\cdots+c_{mn}x_{mn}$

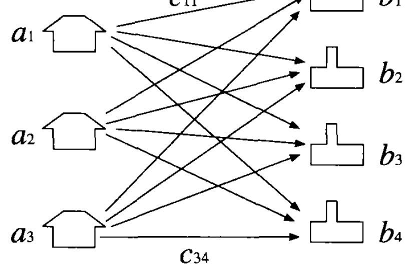

図１　輸送問題のイメージ図

条件：　$x_{i1}+\cdots+x_{in}\leq a_i\ (i=1,\cdots,m)$

$$x_{1j}+\cdots+x_{mj}=b_j\ (j=1,\cdots,n)$$

$$x_{ij}\geq 0\ (i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$$

この問題は（**ヒッチコック型**）**輸送問題**とよばれている．輸送問題において，目的関数は１次式であり，制約式はすべて等号つき１次不等式，あるいは１次等式であることに注意する．

3．中継点があるような輸送問題

前節の輸送問題では，紙を供給する倉庫と紙の需要をもつ印刷工場だけを対象に輸送を考えたが，一般に物資を輸送するとき，積み替えを行う中継基地を使用することが多い．また，道路の混雑を考えれば，ぞれぞれの倉庫や工場と中継基地の間で運ぶ量には制限が設けられている可能性もある．

そこで，倉庫と印刷工場以外に l 個の中継点があり，輸送量に制限があるような問題を考えてみよう（図２参照，施設隣の数字は在庫/注文量，線に付随する数字は（コスト，上限）を表す）．この問題は，倉庫から直接工場へものを運ぶことのみを考えた前節の問題と違い，「倉庫→中継点」，「中継点→中継点」などさまざまな運び方があるので，変数の設定方法を変えなければ定式化が繁雑になってしまう．そのために，施設番号を導入して考えることにする．

- 施設番号 $1\sim m$ は倉庫に対応し，施設 i は a_i トンの在庫量をもつ $(i=1,\cdots,m)$
- 施設番号 $m+1\sim m+l$ は中継点に対応する
- 施設番号 $(m+l)+1\sim(m+l)+n$ は工場に対応し，施設 $(m+l)+j$ は b_j トン注文する $(j=1,\cdots,n)$

この番号づけに対して，施設 i から施設 j へ紙の輸送を考えるような順序対 (i,j) の集合を A とする．図２の場合，$A=\{(1,4),(1,7),(2,4),\cdots,(6,10)\}$ となる．

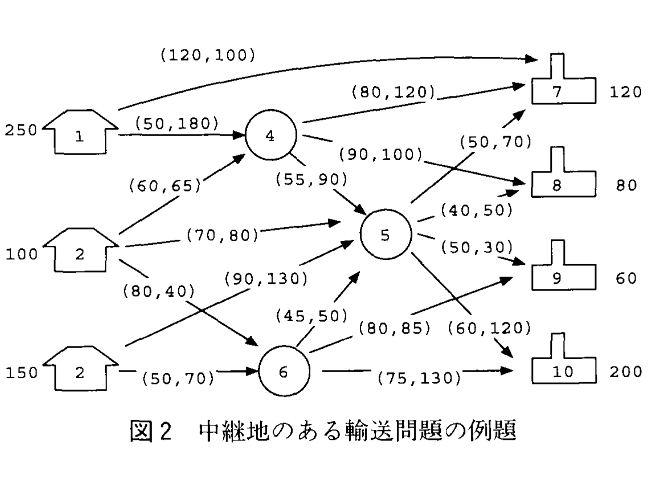

図２　中継地のある輸送問題の例題

$(i,j)\in A$ に対し，施設 i から施設 j への紙１トンあたりの輸送コストを c_{ij}，輸送量の上限を u_{ij} とする．施設 i から施設 j への輸送量を x_{ij} とすれば，前節の条件(a)～(d)に加えて以下の条件

(e) 各中継点において，運び込まれる総量と運び出される総量は等しい

(f) 施設 i から施設 j への輸送量 x_{ij} はその上限 u_{ij} を超えない $((i,j)\in A)$

を満たすようにすべての x_{ij} を定めればよい．施設 k に対し，k から運び出される紙の総量は $(k,j)\in A$ であるすべての j に対して x_{kj} の和をとったものであるが，これを $\sum_{j:(k,j)\in A}x_{kj}$ と表す（例えば図２において $k=2$ の場合，$\sum_{j:(k,j)\in A}x_{kj}=x_{24}+x_{25}+x_{26}$ である）．同様に，施設 k に運び込まれる量は $\sum_{i:(i,k)\in A}x_{ik}$ となる．これらの表記を用いれば各輸送量 x_{ij} を求めるためには以下の数理計画問題を解けばよい．

最小化　$\sum_{(i,j)\in A}c_{ij}x_{ij}$

条件　$\sum_{j:(i,j)\in A}x_{ij}\leq a_i\quad(i=1,\cdots,m)$

$$\sum_{i:(i,k)\in A}x_{ik}=\sum_{j:(k,j)\in A}x_{kj}\quad(k=m+1,\cdots,m+l)$$

$$\sum_{i:(i,j)\in A}x_{ij}=b_{j-(m+l)}\quad(j=m+l+1,\cdots,m+l+n)$$

$$0\leq x_{ij}\leq u_{ij}\quad((i,j)\in A)$$

この問題は前節の輸送問題を一般化させたもので，**最小費用流問題**とよばれるものである．輸送問題と同様にいくつかの等号つき１次不等式と等式の下で１次関数を最小化させるという特徴をもつ．

4．線形計画問題とその解法

4.1　線形計画問題

輸送問題の例のように，**線形計画問題**とは

- 変数の数は有限個である
- 最適化すべき関数は変数に関する１次式である
- 制約の数は有限個であり，いずれも変数に関する等式あるいは等号つきの１次不等式である
- 変数のとれる値は実数の範囲である

ような最適化問題のことをいう．線形計画問題は前節の最小費用流問題をはじめ，生産計画問題などの非常に多くの問題が直接帰着できるほか，変数に整数制約がついた整数計画問題を解く際にも利用されるなど，数理計画のもっとも基本的な問題である．

最小化問題の場合は目的関数の符号を反転し，等式制約は２つの等号つき不等式で置き換え，'≥' 不等号は両辺に (-1) 倍し，さらに非負制約のない変数は２

つの非負変数の差として表せばすべての線形計画問題は以下の**不等式標準形**とよばれる形に書き換えることができる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & c_1x_1+\cdots+c_nx_n \\
\text{条件} & a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \leq b_m \\
& x_1, \cdots, x_n \geq 0
\end{array}
\tag{4}
$$

線形計画問題に対し，すべての制約を満たす変数の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を**実行可能解**といい，すべての実行可能解の集まりを**実行可能領域**，実行可能解の中で目的関数値を最大にするものを**最適解**という．線形計画問題は実行可能解および最適解の有無によって，その答えは以下の 3 通りに分類される．

- **実行不可能**：実行可能解が存在しないもの
- **最適解をもつ**
- **非有界**：目的関数がいくらでも大きくなれるもの

4.2　双対性と相補性

線形計画問題を考えるとき，そのもっとも重要な概念は双対性である．上の問題(4)（**主問題**という）に対する**双対問題**とは以下のように記述される線形計画問題である．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & b_1y_1+\cdots+b_my_m \\
\text{ただし} & a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \geq c_1 \\
& \vdots \\
& a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_m \geq c_n \\
& y_1, \cdots, y_m \geq 0
\end{array}
\tag{5}
$$

問題(5)を不等式標準形に変形し，その双対問題を作れば主問題(4)と同じものが得られるから，双対問題の双対問題は元の問題である．双対問題は，主問題の目的関数値の上界を得ることを目的とした問題で，主問題(4)の第 i 制約の両辺に非負の重み y_i をかけ，得られた不等式をすべて足し合わせた式

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m)x_1+\cdots \\
&\quad +(a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_m)x_n \leq b_1y_1+\cdots+b_my_m
\end{aligned}
$$

を考えることで作られたものである．目的関数はこの不等式の右辺項そのものであり，第 j 制約はこの不等式における変数 x_j の係数が主問題における x_j の目的関数の係数 c_j 以上であることを要請しているものである．その作り方から，$(x_1, \cdots, x_n)$ および $(y_1, \cdots, y_m)$ をそれぞれ(4)および(5)の実行可能解とすれば，

$$c_1x_1+\cdots+c_nx_n \leq b_1y_1+\cdots+b_my_m$$

が成り立つ（これを弱双対定理という）．

双対問題に対しては，つぎの**双対定理**と**相補性定理**が成り立つ．これらは線形計画問題の本質ともいえる重要なものである．

双対定理　主問題，あるいは双対問題の一方が最適解をもてば他方も最適解をもち，両者の最適値は一致する．

相補性定理　$(x_1^*, \cdots, x_n^*)$ および $(y_1^*, \cdots, y_m^*)$ がそれぞれ主および双対問題の最適解である必要十分条件は次の関係が成り立つことである．

$$x_j^*(a_{1j}y_1^*+\cdots+a_{mj}y_m^*-c_j)=0 \quad (j=1, \cdots, n)$$

$$y_i^*(b_i-a_{i1}x_1^*-\cdots-a_{in}x_n^*)=0 \quad (i=1, \cdots, m)$$

このような「よい」性質をもつため，線形計画問題は非常に扱いやすい．次節で簡単に触れる解法はいずれもこれらの性質をフルに活用したものである．

4.3　線形計画問題の解法

まず，2 変数からなる図 3 の線形計画問題を考えてみよう．図からわかるように，2 変数の場合，実行可能領域は一般に多角形になり，最適解をもつ場合には，その頂点のいずれかが最適解を与えることは図から明らかである．一般の n 変数の場合には実行可能領域は多角形を一般化させた多面体とよばれるものになり，最適解をもつ場合には，多面体の頂点のいずれかが最適解を与えることは 2 変数の場合と同様である．

線形計画問題に対する解法は，この「最適解があるならば，それを与える多面体の頂点が存在する」事実を利用するが，大きく分けて 3 つのアルゴリズムがある（[2][3][4]）．

まず，もっとも歴史が古いものは Dantzig により 1947 年に発表された単体法である．単体法の方針は実行可能領域がなす多面体の頂点をまず 1 つ見つけ，隣り合う頂点の中に目的関数値が改善されるものがあればそれに移動することをくり返す，というものである．単体法は実用的には非常に優れており，それをベースにしたソフトウェアは現在も多く使われている．しかし，理論的な計算量は今のところ効率的であるかどうか不明である．

$$
\begin{array}{rl}
\text{最大化} & x_1+3x_2 \\
\text{条件} & x_1+\ \ x_2 \leq 9 \\
& -x_1+\ \ x_2 \leq 3 \\
& 2x_1-3x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

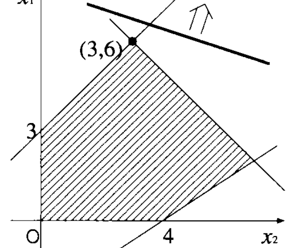

図 3　2 変数の線形計画問題とその実行可能領域

単体法が多面体の頂点をたどるものであることに対し，1984 年に Karmarkar によって提案された（後に Dikin が 1967 年すでに同じ方法を発表していたことが明らかになった）内点法は適切な実行可能解を 1 つ見つけ，その解からスタートして多面体の内部を通り最適解に到達する，という方法である．内点法は理論的にも実用的にも効率的な方法であり，それに基づいたソフトウェアも開発されている．初期点や通る多面体内部のみちすじによって非常に多くのバージョンがあるが，詳しくは文献[2]や[4]などを参照されたい．

上述の単体法，内点法以外の主な方法として 1979 年 Khachiyan に考案された楕円体法がある．楕円体法は，実行可能領域を含むような楕円体を 1 つ見つけ，体積が一定比率で小さくなるように制約の情報を用いて楕円体を更新する，というものである．線形計画問題に対する世界初の理論的効率のよい方法として有名であるが，実用的には非効率であることが知られており，実際に使われることはほとんどない．

これらの解法を実装したソフトウェアは無料，商用のものともさまざまある．近年の計算機の飛躍的な計算能力向上にも後押しされ，変数が数千，制約が数万あるような非常に規模の大きな問題も解けるようである．

4.4 例題の解答

第 3 節の最小費用流問題の図 2 の例題の最適解は図 4 のようになる．

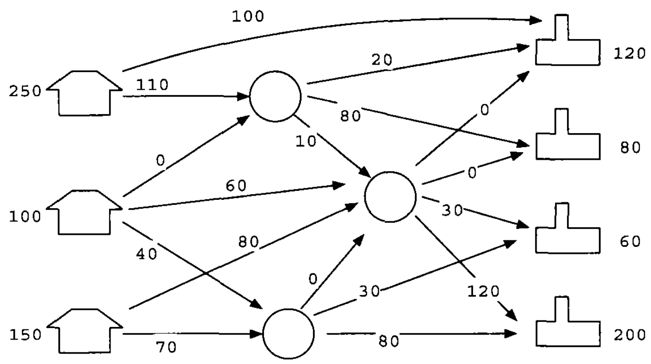

図 4　例題の最適解

なお，輸送問題や最小費用流問題はネットワークとよばれる構造上で定義された線形計画問題であるため，特化した解法がある（文献[1]参照）．また，定式化に表れる制約式がよい構造をもつため，登場する数値がすべて整数値であれば，輸送量がすべて整数となるような最適解をもつことが知られている．

5. おわりに

本稿では輸送問題を例に線形計画問題を取り上げた．紹介した例が本当に「実用的」であるかについて疑問はあると思うが，線形計画問題が世界中のあらゆる場面で役に立っていることは紛れもない事実である．それが少しでも伝われば幸いである．また，線形計画については非常に多くの著書があるが，ここで挙げた参考文献はその中のほんの数冊であるので，お許しを願って締めくくりたい．

参考文献

[1] 久保幹雄, 松井知己, 田村明久編：応用数理計画ハンドブック, 朝倉書店 (2002).

[2] 小島政和, 水野真治, 土谷隆, 矢部博：内点法, 朝倉書店 (2001).

[3] 今野浩：線形計画法, 日科技連出版 (1987).

[4] 田村明久, 村松正和：最適化法, 共立出版 (2002).