Exploring the relationship between the hedging strategies based on coherent risk measures and the martingale probabilities via optimization approach

姚　　偉烽

(筑波大学大学院システム情報工学研究科社会システム工学専攻　現所属・野村アセットマネジメント(株))

指導教員　山本芳嗣 教授

1. 序論

数理ファイナンスにおいて，基本定理と呼ばれる以下２つの重要な定理が知られている：

1. 市場における裁定機会の非存在と同値マルチンゲール確率分布の存在は同値．
2. 市場が無裁定ならば，条件付き請求権の価格は同値マルチンゲール確率分布に基づく期待値である．

特に，任意の証券が複製可能であるような完備市場モデルにおいては，同値マルチンゲール確率分布は唯一であり，条件付き請求権の価格が唯一に得られる．一方，非完備市場モデルにおいては，複数の同値マルチンゲール確率分布が存在するため，無裁定であるような価格の区間としてしか得られない．

本研究では，動的な不確実性を離散モデルで表現し，非完備な状況下でヨーロッパ型，および，アメリカ型条件付き請求権の価格評価を行うものである．具体的には，古典的なヘッジ（ないしは複製）の概念を，近年広く受け入れられているコヒレント・リスク尺度に基づくヘッジに拡張した上で，古典的な基本定理を拡張した結果を示し，価格の上限と下限を求める問題を取り扱う．

2. 先行研究一資産価格付け基本定理

本研究ではが離散時点・離散状態モデルを考え，市場の不確実性をツリーによって表現する：

▷ $t=0,1,\cdots,T$：取引可能な時刻，$T<\infty$]

▷ $\mathcal{N}_t$：時刻 t におけるノード集合，$\mathcal{N}_0=\{0\}$

▷ $\Omega=\bigcup_{0\le t\le T}\mathcal{N}_t$

▷ $a(n)$：ノード n の親ノート

▷ $c(n)$：ノード n の子の集合

▷ p_n：ノード n の起こる（実際の）確率，$p_n>0$

▷ $j=0,1,\cdots,J$：市場で取引されている資産

▷ $S_n=(s_n^0,\cdots,s_n^J)^\top$：ノード n における資産価格ベクトル，$s_n^0>0$.

▷ $\delta_n:=1/s_n^0$：割引率

▷ $Z_n=(z_n^0,\cdots,z_n^J)^\top:=\delta_n S_n$：

▷ $\{\Theta_n=(\theta_n^0,\cdots,\theta_n^J)^\top : n\in\Omega\}$：取引戦略

定義（裁定戦略）取引戦略 $\{\Theta_n : n\in\Omega\}$ が裁定戦略である⇔

(1) $Z_0^\top\Theta_0=0$

(2) $Z_n^\top\Theta_n=Z_n^\top\Theta_{a(n)}$ $(n\neq 0)$

(3) $Z_n^\top\Theta_n]\ge 0\,\forall n\in\mathcal{N}_T$

(4) $\mathbb{E}^P[Z_T^\top\Theta_T]>0$

> 定理１（基本定理）$\mathcal{M}$ は P と同値な Ω 上のマルチンゲール確率の集合にすれば，裁定戦略の非存在と $\mathcal{M}$ が非空は等価である．

[定義] ヨーロッパ型条件付き請求権 $\mathcal{N}_T$ 上の確率変数 Y_T をヨーロッパ型条件付き請求権と呼ぶ．

> **定理２（ヨーロッパ型条件付き請求権の価格評価）**
> $P\in\mathrm{int}(\mathcal{P}_\rho)$ とする．このとき，市場に裁定機会がなければ，Y_T の価格 Y_0 は以下を満たす：
> $$\begin{cases}\min\limits_{Q\in\bar{\mathcal{M}}}\sum\limits_{n\in\mathcal{N}_T}q_n\delta_nY_n=\delta_0Y_0\\ \quad=\max\limits_{Q\in\bar{\mathcal{M}}}\sum\limits_{n\in\mathcal{N}_T}q_n\delta_nY_n \quad \text{if } \max=\min,\\ \min\limits_{Q\in\bar{\mathcal{M}}}\sum\limits_{n\in\mathcal{N}_T}q_n\delta_nY_n<\delta_0Y_0\\ \quad<\max\limits_{Q\in\bar{\mathcal{M}}}\sum\limits_{n\in\mathcal{N}_T}q_n\delta_nY_n \quad \text{otherwise.}\end{cases}$$
> ただし，$\bar{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ の閉包．

3. コヒレント尺度

X をポートフォリオの純資産価値を表す確率変数とする．このとき，X の有するリスク量を $\rho[X]$ によって表す．定義（コヒレントなリスク尺度）リスク尺度 ρ が以下の４つの公理を満たすならば，ρ はコヒ

レント (coherent) であるという：

(a) $\forall X, \forall c \in \mathbb{R}, \rho[X+c]=\rho[X]-c$.

(b) $\forall X_1, X_2, \rho[X_1+X_2] \leq \rho[X_1]+\rho[X_2]$.

(c) $\forall X, \forall \lambda \geq 0, \rho[\lambda X]=\lambda\rho[X]$.

(d) $X \leq Y \Rightarrow \rho[Y] \leq \rho[X]$

コヒレント尺度 ρ は確率分布の集合 $\mathcal{P}_\rho=\{P|\mathbb{E}^P[-X] \leq \rho[X]\}$ によっても特徴づけられることが知られている：

$$\rho[X]=\max\{\mathbb{E}^P[X]|P \in \mathcal{P}_\rho\}.$$

ただし，$\mathbb{E}^P[X]$ は確率測度 P の下での X の期待値．以下では X として $\mathcal{N}_T$ 上の確率変数をとるものとする．次の I.～II. は2つのコヒレント尺度と対応する $\mathcal{P}_\rho$ を示している．

I）最大損失：$\rho[X_T]=\max_{n \in \mathcal{N}_T}\{-X_n\}$；

$$\mathcal{P}_\rho=\{Q|\sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n=1, q_n \geq 0\}=:\mathcal{P}_1.$$

II）β-CVaR：$\beta \in [0,1)$ に対して

$$\rho[X_T]=\min_\alpha\left\{\alpha+\frac{1}{1-\beta}\mathbb{E}[-X_T-\alpha]^+\right\};$$

$$\mathcal{P}_\rho=\left\{Q \in \mathcal{P}_1|0 \leq q_n \leq \frac{p_n}{1-\beta}\right\}.$$

ただし，$[x]^+:=\max\{x,0\}$.

3.1 裁定戦略とヘッジの一般化

本研究では上述のコヒレント尺度を用いることでよく知られた裁定機会の概念を拡張する．定義（ρ-裁定戦略）取引戦略 $\{\Theta_n : n \in \Omega\}$ が ρ-裁定戦略である⇔

(1) $Z_0^\top\Theta_0=0$

(2) $Z_n^\top\Theta_n=Z_n^\top\Theta_{a(n)}$ $(n \neq 0)$

(3) $\rho[Z_T^\top\Theta_T] \leq 0$

(4) $\mathbb{E}^P[Z_T^\top\Theta_T]>0$

条件(3)の ρ が最大損失尺度のとき，ρ-裁定戦略は古典的な裁定戦略と一致し，ファイナンスの基本定理（無裁定と同値マルチンゲール確率の存在の同値性）が導かれる．以下の定理は従来の基本定理を上記の ρ-裁定戦略に基づいて拡張したものである．

> 定理3（基本定理の拡張）任意のコヒレント尺度 ρ に対して，$\mathcal{Q}=\mathrm{int}(\mathcal{P}_\rho)\cap\mathcal{M}$ とおく．$\mathcal{M}$ は P と同値な Ω 上のマルチンゲール確率の集合．このとき，$P \in \mathrm{int}(\mathcal{P}_\rho)$ であるならば，ρ-裁定戦略の非存在と $\mathcal{Q}=\mathrm{int}(\mathcal{P}_\rho)\cap\mathcal{M}$ の存在は等価である．

定義（ρ-ヘッジ）取引戦略 $\{\Theta_n : n \in \Omega\}$ が資産 X を ρ-ヘッジする⇔$\rho(Z_n^\top\Theta_n-X_n) \leq 0$.

ここ X_n は状態 n で資産 X の価値を意味する．無 ρ-裁定の市場では，取引戦略 $\{\Theta_n : n \in \Omega\}$ が資産 X を ρ-ヘッジすることから $Z_0^\top\Theta_0 \geq X_0$ のことが分かる．こちらのアイディアを使えば，下の非完備市場におけるヨーロッパ型条件付き請求権の価格評価定理が得られる．

> 定理4（非完備市場における価格評価）$P \in \mathrm{int}(\mathcal{P}_\rho)$ とする．このとき，市場に ρ-裁定機会がなければ，Y_T の価格 Y_0 は以下を満たす：
>
> $$\begin{cases} \min_{Q \in \bar{\mathcal{Q}}} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n\delta_n Y_n=\delta_0 Y_0 \\ \quad =\max_{Q \in \bar{\mathcal{Q}}} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n\delta_n Y_n \quad \text{if } \max=\min, \\ \min_{Q \in \bar{\mathcal{Q}}} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n\delta_n Y_n<\delta_0 Y_0 \\ \quad <\max_{Q \in \bar{\mathcal{Q}}} \sum_{n \in \mathcal{N}_T} q_n\delta_n Y_n \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$
>
> ただし，$\bar{\mathcal{Q}}$ は $\mathcal{Q}$ の閉包．

4. 数値計算

前節で提案した非完備市場における価格評価モデルを使って二期間三資産のヨーロッパ型条件付き請求権の価格を計算した．実験は β を1から0まで動かせて，それぞれ最適化問題を解く．β が小さくなるとき，無裁定区間も小さくなることが分かった，特に β が0.4573のとき，無裁定区間が単点集合になった．その値はヨーロッパ型条件付き請求権の基準価格と認識される，その価格で売り手買い手双方が β の意味で同じリスクを背負うことを意味する．

β	1	0.8	0.6	0.4573
上限	18.95	15.24	13.36	10.98
下限	6.92	7.09	9.53	10.98

一方，ヘッジエラー最小化法から得られた値を請求権の取引価格にすれば，古典的な裁定戦略が存在しないが，β-CVaR 裁定の意味で，売り手または買い手にとって裁定の機会が存在する．

5. おわりに

本研究は無裁定区間とリスク尺度の関係をモデル化にした．古典の裁定戦略とヘッジの概念の元に，新しい ρ-裁定戦略と ρ-ヘッジを提案した．また，損失評価がコヒレントリスク尺度にして，従来の価格付け基本定理を一般化にした．さらに，数値実験を通じて，より狭い無裁定価格区間が得られることも分かった．

実用性向上のため，大型離散モデルにおいての効率的な計算方法の提案および連続モデルへの拡張が必要である．そして，実際のマーケットデータから離散ツリーを構造するアルゴリズムを提案しなければならない．