Variational Inequality Approaches to Generalized Nash Equilibrium Problems

鍋谷　昴一
（京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻　現所属：㈱NTT データ）
指導教員　福島雅夫 教授

1. はじめに

一般化Nash均衡問題（GNEP：Generalized Nash Equilibrium Problem）とは，戦略集合が相手の戦略にも依存する場合のNash均衡問題であり，より柔軟なモデル化ができることから，電力市場や環境問題などをはじめ様々な分野で近年注目を集めている．

一般化Nash均衡問題に対する数値解法はあまり知られていないが，ある種の構造を持つ一般化Nash均衡問題に対しては変分不等式（VI：Variational Inequality）を解くことで，一般化Nash均衡解を求める手法がFacchineiら[1]によって研究され，有力な数値解法の一つとして注目を集めている．しかし，その変分不等式を解いて得られる一般化Nash均衡解はLagrange乗数を用いて特徴付けられる特殊な均衡解のみであることも示されている．通常，一般化Nash均衡解は複数存在することが知られており，ゲーム理論の立場からはできるだけ多くの均衡解を求めることが重要である．そこで，本研究ではすべての一般化Nash均衡解を含むような変分不等式族を構成し，適当な仮定の下でパラメータ集合を有界な集合に限定できることを示した．また，各変分不等式が単調性と呼ばれる望ましい性質を持つための条件も明らかにした．

2. 問題の定義

$\nu=1,\cdots,N$に対してプレイヤーνが決定する戦略の次元をn_νとし，戦略を$x_\nu\in\mathcal{R}^{n_\nu}$と表す．ここで，$x:=(x_\nu)_{\nu=1}^N$，$x_{-\nu}:=(x_{\nu'})_{\nu'=1,\,\nu'\neq\nu}^N$，$n:=\sum_{\nu=1}^N n_\nu$と定める．プレイヤー$\nu$が，与えられた$x_{-\nu}$に対して問題$P_\nu(x_{-\nu})$

$$\begin{aligned}&\text{minimize}\quad \theta_\nu(x_\nu,x_{-\nu})\\&\text{subject to}\quad x_\nu\in X_\nu,\quad g(x_\nu,x_{-\nu})\le 0\end{aligned}\tag{1}$$

を解くことを考える．ここで，$\theta_\nu:\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$，$g:\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}^m$であり，$X_\nu\subset\mathcal{R}^{l_\nu}$である．一般化Nash均衡問題とは，各プレイヤーが単独で戦略を変える動機を持たない戦略の組，すなわち$\nu=1,\cdots,N$に対しx_ν^*が問題$P_\nu(x_{-\nu}^*)$の最適解であるような戦略の組$x^*=(x_1^*,\cdots,x_N^*)$を求める問題である．均衡解の集合をSol GNEPと表記する．問題(1)において，相手の戦略に依存する制約関数gが含まれていること，およびこの制約関数はプレイヤー間で共通であることに注意する．

さらに問題(1)の目的関数および制約関数について次の仮定1が成立するとする．

仮定1. 任意の$x_{-\nu}\in\mathcal{R}^{n-\nu}$に対して$\theta_\nu(x_{-\nu},\cdot)$と$g(x_{-\nu},\cdot)$は微分可能な凸関数であり，$X_\nu$は空でない閉凸集合である（$\nu=1,\cdots,N$）．

3. 変分不等式を用いた解法

Facchineiら[1]は，仮定1の下で，次式で定義されるベクトル値写像F: $\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}^n$と集合$X\subset\mathcal{R}^n$

$$F(x):=(\nabla_{x_\nu}\theta_\nu(x))_{\nu=1}^N\tag{2}$$

$$X:=\{x\in X_1\times\cdots\times X_N|g(x)\le 0\}\tag{3}$$

を用いて，次の変分不等式の解と一般化Nash均衡解の関係を考察した．

$$\mathrm{VI}(F,X):\begin{array}{l}\text{Find } x^*\in X \text{ such that}\\ F(x^*)^T(x-x^*)\ge 0,\quad \forall x\in X.\end{array}$$

以後，変分不等式VI(F,X)の解をSol(F,X)と表記する．

(2)，(3)で用いて定義される変分不等式VI(F,X)の解は一般化Nash均衡解になることが知られている[1, Thereom 2.1]．しかし，VI(F,X)を解いて得られる解はRosenの正規化均衡解[2]と呼ばれる制約$g(x_\nu,x_{-\nu})\le 0$に対するLagrange乗数が各プレイヤー間ですべて等しい場合の均衡解のみであることも知られている．一般には一般化Nash均衡解は複数の均衡解を持つことが知られており，ゲーム理論の観点からはできるだけ多くの均衡解を得ることが重要である．そこで本研究では，Facchineiらのアプローチを一般化し，すべての一般化Nash均衡解を含むような変分

不等式族を構成する．

まず，$\Delta:=(\Delta_\nu)_{\nu=1}^N\in\mathcal{R}_+^{Nm}$，$\Delta_\nu\in\mathcal{R}_+^m$ $(\nu=1,\cdots,N)$ をパラメータとし，F^Δ: $\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}^n$ を

$$F^\Delta(x):=(\nabla_{x_\nu}\theta_\nu(x)+\nabla_{x_\nu}g(x)\Delta_\nu)_{\nu=1}^N$$

で定義し，変分不等式族 VI(F^Δ, X) を考える．

この変分不等式族の解集合と一般化 Nash 均衡解の関係について以下のことが成立する．

定理 1．一般化 Nash 均衡解 x^* において制約想定が成立しているとする．このとき，適当な $\Delta\in\mathcal{R}_+^{Nm}$ が存在して $x^*\in$Sol(F^Δ, X) である．

したがって，任意の一般化 Nash 均衡解において制約想定が成立しているならば変分不等式族の解集合はすべての一般化 Nash 均衡解を含むことがわかる．さらに，本研究ではパラメータ空間 $\mathcal{R}_+^{Nm}$ をより小さな集合に制限したとしても変分不等式族の解集合はすべての一般化 Nash 均衡解を含んでいることを示した．

定理 2．任意の一般化 Nash 均衡解において制約想定が成立しているとする．このとき

$$\bigcup_{\Delta\in\mathcal{P}}\mathrm{Sol}\,(F^\Delta, X)\supset\mathrm{Sol\ GNEP} \tag{4}$$

が成立する．ここで

$$\mathcal{P}:=\prod_{i=1}^m\left(\bigcup_{\nu=1}^N\{\Delta\in\mathcal{R}_+^N|\Delta_\nu=0\}\right)\subset\mathcal{R}_+^{Nm}$$

である．さらに制約関数 h_ν, g がすべて線形ならば有界な集合 $\Lambda\subset\mathcal{R}_+^{Nm}$ が存在して $\mathcal{P}:=\prod_{i=1}^m(\bigcup_{\nu=1}^N\{\Delta\in\mathcal{R}_+^N|\Delta_\nu=0\})\cap\Lambda$ に対して(4)が成立する．

また，任意のパラメータ $\Delta\in\mathcal{R}_+^{Nm}$ に対して F^Δ が単調になるための条件を求めた．

命題 1．F が単調であるとし，さらに制約関数 g が分離可能，つまり微分可能な凸関数 $\hat{g}_\nu$: $\mathcal{R}^{n_\nu}\to\mathcal{R}^m$，$\nu=1,\cdots,N$ を用いて $g(x)=\sum_{\nu=1}^N\hat{g}_\nu(x_\nu)$ とかけるとする．このとき，任意の $\Delta\in\mathcal{R}_+^{Nm}$ に対して F^Δ は単調である．

一般には，VI(F^Δ, X) の解が必ずしも一般化 Nash 均衡解になるとは限らない．そこで，本研究では VI(F^Δ, X) の解が一般化 Nash 均衡解になるための十分条件を求めた．

命題 2．VI(F^Δ, X) の解 x^* が一般化 Nash 均衡解になるための十分条件は

$$g_i(x^*)\Delta_{\nu,i}=0\quad i=1,\cdots,m,\quad \nu=1,\cdots,N$$

が成立することである．

4. 数値実験

紙面の都合で結果の詳細は割愛するが，修士論文中では Harker の問題 ($N=2, n=2, m=1$)，環境制約付きの生産計画問題 ($N=3, n=3, m=2$)，転送制約付きの電力市場モデル ($N=2, n=18, m=9$) に対し，提案した手法を適用した結果を報告している．いずれの問題においてもパラメータ空間 $\mathcal{P}$ からパラメータ Δ をグリッドまたはランダムに生成することで理論的な均衡解の集合に広く分布するような様々な均衡解が得られたことを確認した．特に電力市場モデルでは VI(F, X) を解いて得られる解を弱支配する均衡解が見つかるなど興味深い結果が得られた．

5. 結論

本研究では一般化 Nash 均衡問題に対し，一般化 Nash 均衡解をすべて含むような変分不等式族の構成を行った．パラメータ空間を適当な仮定の下で制限できることを示し，また，パラメータを用いて定義されるベクトル値写像が単調性を持つための条件や一般化 Nash 均衡解になるための条件を求めた．最後に，数値実験を通して一般化 Nash 均衡解の解集合に広く分布する解を求められることを確認した．本研究では，パラメータ生成法として非常に単純な方法を用いたが，より現実的な一般化 Nash 均衡問題を解くにあたっては，効率的なパラメータの生成法の開発が今後の課題である．

参考文献

[1] F. Facchinei, A. Fischer and V. Piccialli, *On generalized Nash games and variational inequalities*, Operations Research Letters, 35 (2007), pp. 159-164.

[2] J. B. Rosen, *Existence and uniqueness of equilibrium points for concave N-person games*, Econometrica, 33 (1965), pp. 520-534.