複雑ネットワークの研究動向について

増田　直紀

現実世界に見られるグラフは複雑である．複雑でありながらも，スモールワールド，スケールフリーなどといった特徴が同定されている．そのような複雑ネットワークの研究は1998年ごろから始まった．10年が経過した現在，多くの研究者の参画によって，様々な方向へ研究が発展している．本稿では，複雑ネットワークの代表的なモデルを概観した後に，ネットワーク上の現象論やその応用可能性を述べる．

キーワード：スモールワールド，スケールフリー，グラフ

1. はじめに

ネットワークという日本語には，様々な意味がある．複雑ネットワーク（complex networks）という研究分野を指すときのネットワークは，数学でいうグラフと同値である．図1の正方格子は無限グラフの例である．黒丸を頂点，黒丸と黒丸を結ぶ線分を枝という．二者関係の集まりがグラフを定義するともいえる．

現実世界には，インターネット，人の組織，会社の取り引き関係，道路網，食物網，脳，遺伝子の相互作用など，数多くのネットワークが存在する．これらの結びつき方は，図1のように規則的でもなければ，全くランダムなわけでもない．実際のネットワークにあるような結びつき方やその機能や応用が，複雑ネットワークという分野の研究対象である．複雑ながらもそれなりの法則があることがきっかけで，1998年ごろから発展している分野である．本稿では，ネットワーク上の諸現象やその応用に重きを置いて，複雑ネットワークを簡単に解説する．より詳しくは，啓蒙書[2][4][7][15][16]，専門書[8][9][14]，英語の総説[1][3][5][22][24][25][28][30]等も参照されたい．

2. ネットワークのモデル

2.1 スモールワールド・ネットワーク

実存するほとんどのネットワークが持つ特徴の1つは，スモールワールド性である．スモールワールドという言葉は，社会学のネットワーク分析研究では以前から用いられていた．直接の知人は距離1，知人の知人は距離2，というふうにして，人と人の間の距離を測ることにする．1960年代に手紙ベースで行われた研究によると，知らない人同士でも，平均6程度の距離でつながっている[29]．この結果は「6次の隔たり」と名付けられ，スモールワールドという概念の学問的な発端である．より定量的には，関心の範囲にある頂点数 n を徐々に増やすときに平均距離 $L=O(\log n)$ であることが，スモールワールドの定義である．$L=o(\log n)$ のネットワークを，ウルトラスモールということもある．

研究者によって多少異なるのだが，複雑ネットワー

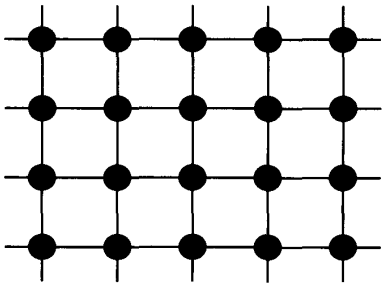

図1　正方格子

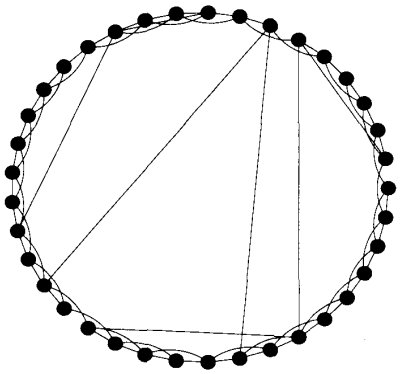

図2　Watts-Strogatz モデルに基づくスモールワールド・ネットワーク

ますだ　なおき
東京大学 大学院情報理工学系研究科
〒113-8656 文京区本郷7-3-1

ク研究においては，$L=O(\log n)$ に加えてもう1つの性質を満たすネットワークをスモールワールドと呼ぶことが一般的である．その性質とは，局所的には枝が密であることであり，クラスター性と呼ばれる．具体的に，ネットワークの中にある3つの頂点とそれらを結ぶ3本の枝からなる三角形の数が，同数の頂点や枝を持つがランダムに結線しているネットワークの三角形数よりも有意に多いとき，元のネットワークはクラスター性が高いという．クラスター係数という量を測ることによって定量化する（定義は割愛する）．L が小さく，かつ，クラスター係数が大きいネットワークを，スモールワールド・ネットワークといい，図2がその例である．分野を問わず，現実世界の多くのネットワークはスモールワールドである．

一方，図1のような規則的なネットワークに限らず，有限次元の空間（2次元平面など）に埋めこまれたネットワークでは，しばしば L が大きく，スモールワールドでない．交差点を頂点，ある交差点から次の交差点までの道を枝と見なした道路網が，その例だ．実際，全国から任意に選んだ2つの交差点は，6次や10次程度の隔たりでは大抵つながっていない．ただ，このようなネットワークも，この分野の研究対象になっている．

2.2 スケールフリー・ネットワーク

複雑ネットワークのキーワードを2つ挙げるとすれば，スモールワールドとスケールフリーであろう．これらは相補的な概念といえる．スケールフリーを説明するために，自分に隣接する頂点の数に着目する．隣接頂点数をその頂点の次数といい，k で表す．$\{p(k)\}$ を次数分布とする．すなわち，n 個の頂点からなるネットワークの中に，次数 k の頂点は約 $np(k)$ 個あるということである．次数分布がベキ分布

$$p(k)\propto k^{-\gamma} \tag{1}$$

に従うネットワークを，スケールフリー・ネットワークという．式(1)は，小さい k では成立していないことが多い．k の大きい所で近似的に成立しているかどうかに注目する．また，式(1)が近似的に成立する範囲には上限がある．n は有限なので，$k(\leq n-1)$ も有限だからである．k が非常に大きくなると，$p(k)$ は，例えば指数的に小さくなって0に至る．

現実の多くのネットワークは，スケールフリー・ネットワークである．$2<\gamma<3$ となる例が多い．スケールフリー・ネットワークの特徴は，ハブの存在である．ハブとは k が大きい頂点のことである．スケールフリーではない次数分布，例えば正規分布の $\{p(k)\}$ に対しても，大きい k に対する $p(k)$ は正ではある．しかし，$p(k)$ は k が大きくなると非常に小さくなるので，平均からある程度離れた k では $np(k)\ll 1$ となり，事実上ハブが存在しない．一方，ベキ則の $\{p(k)\}$ の場合，$p(k)$ は k が増えるにつれて減少するものの，その減り方は遅く，それなりの数のハブが存在する．ハブの存在は，ネットワーク上の諸現象を大きく左右する．

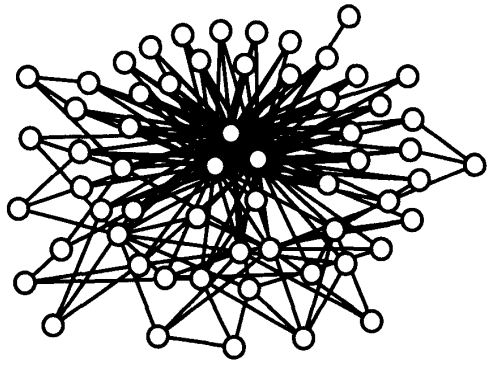

図3 Barabási-Albert モデルに基づくスケールフリー・ネットワーク．Pajek（http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/）で作成

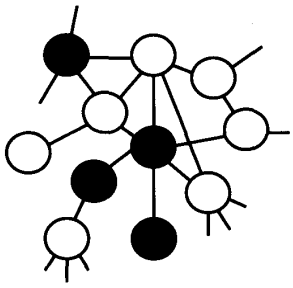

図4 ネットワーク上のサイト・パーコレーション

スケールフリー・ネットワークの例を図3に示す．スケールフリー・ネットワークを生成するモデルは，多く提案されている．スケールフリー性以外の特徴も含めた意味での実データとの合致度，生成過程の現実らしさ，数理的な解析の行いやすさ，などを総合的に見ると，各モデルは一長一短である．種々のモデルが，場合によって使いわけられている．

3. ネットワーク上の現象のモデル

以上，ネットワークの構造について紹介した．構造についての最近のホットトピックには，枝の重み，コミュニティ構造，フラクタル性を持つネットワークな

どがある．

一方，ネットワークは相互作用が起こる下地である．複雑なネットワークの特徴が大体理解できた，という立場にたってみよう．すると，次の課題は，ネットワークの上での現象や機能をどう調べるか，複雑ネットワーク上の現象は複雑でないネットワーク上の現象とどのくらい異なるか，ネットワークの頂点や枝に対して操作を行うと現象や機能がどのように変化するか，などである．本誌の読者の中には，現象論よりも工学的な応用や実生活における問題解決への応用に興味が強い方も多いかもしれない．そのような応用に生かすためにも，ネットワーク上の現象論は大切である．以下，応用にも触れつつ，複雑ネットワーク上で調べられている主な現象論を簡単に紹介する．

3.1 パーコレーション

パーコレーションとは，浸透の意味である．確率モデルとしてのパーコレーションは，1941年に提案された．パーコレーションにはいくつかの種類がある．サイト・パーコレーションというモデルでは，各頂点ごとに独立に，確率 q で黒石を，確率 $1-q$ で白石を置く（図4）．感染症に対応づけるならば，黒石を病人，白石を健康人と見なし，黒石の連結成分の塊でもって，その感染症の広がり具合を表す．

黒石や白石をひとたび置いたらば，後は動かさない．時間がないという意味でパーコレーションは単純であるが，実は，時間によって頂点の状態が変化するSIRモデル（後述）という感染症モデルの最終状態が，頂点の代わりに枝に黒石や白石を置くボンド・パーコレーションというモデルに対応する[6]．したがって，パーコレーションの有用性は，モデルの見た目以上に高い．

サイト・パーコレーションでもボンド・パーコレーションでも，ネットワークに応じた臨界確率 q_c が存在し，$q>q_c$ のときに限って，黒石の塊が大きくなる．数学的にいうと，無限グラフにおいて，$q>q_c$ ならば黒石の塊が無限遠方まで広がる確率が正となる．

スモールワールド・ネットワークやスケールフリー・ネットワークが提案されてすぐに，複雑ネットワーク上のパーコレーションの研究は始まった（詳しくは文献[20]やその引用文献を参照）．枝数（＝可能な感染イベントの数）が同等なネットワーク同士で比較すると，スモールワールド・ネットワークでは，L が大きいネットワークよりも q_c が小さい．スケールフリー・ネットワークでは，次数が一様なネットワークよりも q_c が小さい．特に $\gamma\leq 3$ では $q_c=0$ となる．また，経験に基づいて大雑把にいうと，スケールフリーの効果はスモールワールドの効果よりも大きい．

q_c が小さいほど感染症は広まりやすいので，スモールワールド・ネットワークやスケールフリー・ネットワークでは感染症が広まりやすい．これは，実用的な含意を持つ．感染症を媒介するスケールフリー・ネットワークの代表例は，コンピューター・ウイルスを媒介するインターネットと，性病のネットワークである．これらの場合は，小さい q（感染率と見なせる）に対してさえ，病人の塊が広がることが多いのである．

パーコレーションのもう1つの応用例として，インターネットの上のサイト・パーコレーションを，感染症ではなく故障耐性のモデルと解釈してみる．この解釈では，黒石は正常に稼働しているコンピューター，白石は故障しているコンピューターである．コンピューター同士が大域的につながっていてこそインターネットが機能を発揮するので，黒石の連結成分が大きいことが望ましい．前述の結果を再解釈してみよう．スケールフリー・ネットワークでは，小さい黒石の確率 q，すなわち故障したコンピューターが多い状況でも，インターネットは全体としてつながっていやすい（黒石の連結成分が大きい）ということになる．ハブが全体をつなぎとめるからである．ハブに白石が置かれて故障しても，スケールフリー・ネットワークには代替のハブがいるので，何とかなるのである．

インターネットは，故障だけではなく，故意の攻撃にもさらされるかもしれない．この場合，攻撃する側は，ランダムに白石を置くのではなく，ハブに優先的に白石を置いて，インターネットの破壊を企てるだろう．実は，ハブを優先的に攻撃をされると，スケールフリー・ネットワークは，そうでないネットワークよりも弱い．すなわち，少ない故障（＝少ない白石＝多い黒石＝大きい q）だけでも，稼働しているコンピューターたちが分断されてしまう（黒石の連結成分が小さくなる）．すると，ハブを何らかの意味で防御する方策，ハブに機能を集中させることの是非，ハブが選択的にやられてもある程度耐えられるネットワーク構造の模索，などが関心事となるのである．

3.2 動的な感染症のモデル

時間を陽に扱った感染症モデルもある．その代表例はコンタクト・プロセス（SISモデルとも呼ばれる）とSIRモデルである．SISモデルは，2状態（健康人Sと患者I）モデルであり，回復しても免疫がつかな

い淋病，マラリアなどの疾病に対応する．Sは自分の隣にいるIから確率的に感染する．Iの頂点は時間が経って回復したらSに戻り，再び周りのIから感染する危険にさらされる（図5）．SIRモデルは，3状態（S，I，および，回復して免疫を得た人R）モデルである．感染過程はSISモデルと同じだが，Iから回復した頂点は免疫を得た状態Rとなり，その後は再び感染しない（図6）．

両方のモデルについて，ネットワークによって大規模な感染の起こりやすさは異なる．ネットワーク依存性は，パーコレーションの場合に大体一致する（詳しくは文献[14][24]を参照）．特に，スケールフリー・ネットワークでは感染が広がりやすい．パーコレーションのq_cと同様に，SISモデルやSIRモデルの感染力パラメータには，それ以上大きいと大域的な感染が起こりうる，という閾値がある．閾値は$\gamma \leq 3$のスケールフリー・ネットワークでは0となる．

3.3 進化ゲーム

囚人のジレンマと呼ばれる2人ゲームでは，各自は協力する（Cooperate），しない（Defect），のいずれかを選ぶ．論理的に考えると各自が利己的なDをとるのが均衡解だが，集団全体の利益のためには全員が利他的なCをとると好ましい，という設定になっている．半世紀程度にわたって，Cの伝播を可能にする様々なメカニズム，特に，各自は自分の近くの成功者の行動を真似る，という意味で進化あるいは社会学習に基づくメカニズム，が提案されている．

社会相互作用が起こるネットワークも，スモールワールドなどの意味で複雑である．近年，ネットワーク上の進化ゲーム（図7）が研究され始め，ネットワーク構造が協力を促進する，という結果が多く発表されている（総説に文献[21][28]がある）．

これには2つの研究の流れがある．1つ目はスケールフリー・ネットワークのように次数が非一様であるネットワークほど協力が増えるという数値計算結果である．ただ，相手の数が人それぞれで異なるときにゲームをどう定義するか，は自明でない．この根本的な問題を棚上げした上での結果なので，今後，社会科学の諸領域もまきこんで解釈や定式化を進める必要があるだろう[21]．2つ目は，次数が一定のネットワークにおいて，次数が小さいほど協力が促進されるという結果である（例えば文献[27]）．こちらは，前者よりも結果が数学的，体系的である．Dの集団の中にCが1個体，あるいは一定の個体数入るときに，最終的にCだけのネットワークになるか否か，という問題設定が主で，集団遺伝学に歴史を持つ．それ以外の場合の解析や1つ目の結果との対応関係は，興味深い課題である．

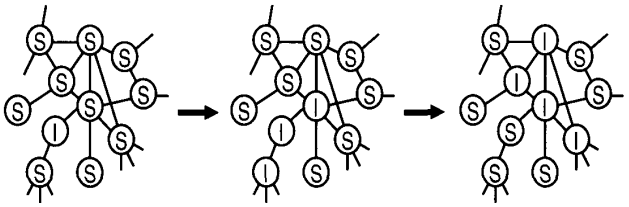

図5　ネットワーク上のSISモデル

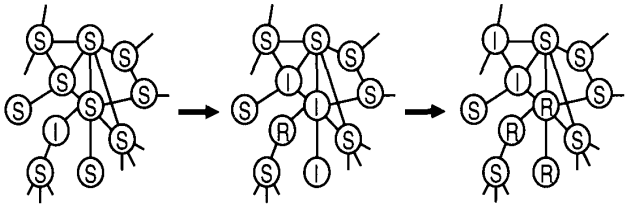

図6　ネットワーク上のSIRモデル

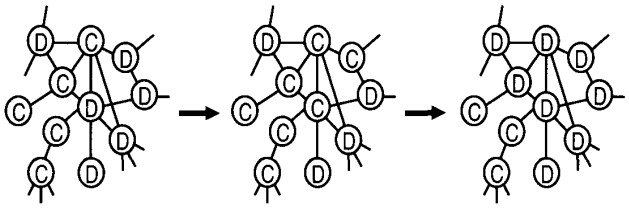

図7　ネットワーク上の進化ゲーム

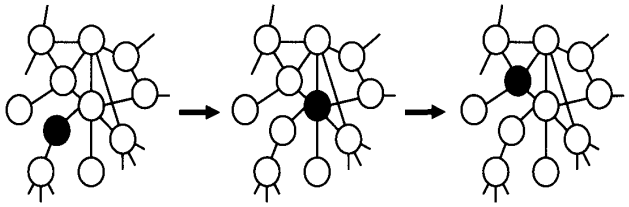

図8　ネットワーク上のランダム・ウォーク

本稿で紹介しているような基礎モデルの範囲でいうと，ネットワーク上のゲームダイナミクスは，感染症のダイナミクスなどより難しい．サイト・パーコレーションは自分の状態（黒石か白石）は周りの頂点の状態とは関係なく決まる．SISモデルやSIRモデルでは，微少時間後の自分の状態は，自分の状態と隣の頂点の状態で決まる．一方，進化ゲームでは，次の時刻での自分の行動（CかD）は，自分と隣の頂点だけでなく2つ隣の頂点の行動にも依存する．自分の次の時刻の行動を決めるには，自分の利得（囚人のジレンマを隣人と行うことによって得た利益の大きさ）と隣の頂点の利得と比較する．そして，隣の頂点の利得は，

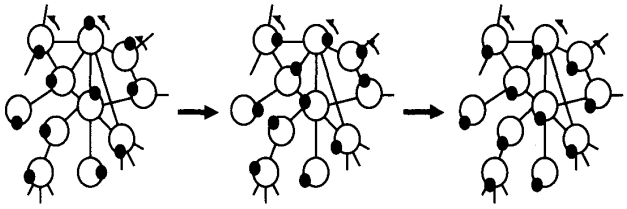

図9　ネットワーク上の同期現象

隣の隣の頂点の行動によるからである．この難しさが大きな理由で，現時点では，ネットワーク上のゲームを解析するツールは少ない．今後の発展が望まれる．

3.4　ランダム・ウォーク

グラフ上のランダム・ウォークは，数学や物理学において古くから調べられている．複雑ネットワーク上のランダム・ウォークは，2000年ごろから研究されている．最も単純には，ランダム・ウォーカーが1人だけネットワークの中にいて，単位時間ごとに，自分の隣接頂点のどれかに等確率で動く確率過程を考える(図8)．じゅうぶん時間がたったときにランダム・ウォーカーがハブにいやすいこと，出発地点に帰ってくるまでにかかる時間，などが調べられている（文献[17]やその引用文献を参照)．

ランダム・ウォーカーに目的地までの部分情報をもたせた拡張版は，ネットワーク上の情報探索のモデルとして調べられている．インターネットや何らかのネットワーク構造を持つデータベース上で情報を探す，という応用がある．また，6次の隔たりの社会実験[29]では，出発地点の人や中継地点の人は，ゴールの人までの最短経路を知っていたわけではない．それにも関わらず，何となくゴールの人に近そうな知人へと手紙を投げていったら，平均6次でゴールまでつながったのである．

これらの興味から，全くランダムでもなく，かといってウォーカーが最短経路の情報を完全に知っているわけでもないようなウォークが精力的に解析されている．ゴールの大雑把な方角の情報がわかっている場合(解説に文献[18])，隣接頂点の次数やすでに訪れた頂点についての情報が入手できる場合[13]，などが研究例である．

3.5　カスケード故障

実世界のネットワークでは，枝の上にしばしば物量が流れている．車が道路を走る，人が電車や飛行機で移動する，パケットがコンピューターからコンピューターへと渡される，電気が電力網を流れる，などが例である．これらの現象は，離散数学の分野では例えばフローという概念を用いてモデル化され，様々なアルゴリズムや最適化問題が研究されている．

関係して，複雑ネットワーク上で精力的に研究されている過程の1つに，カスケード故障がある．電力網を考えよう．頂点は発電所や家庭などを表し，枝は電線である．電力網はスモールワールド・ネットワークであることが知られている．電力が，発電所から末端のノードのそれぞれに決まった量だけ送られている．枝ごとに，通過できる電力の最大容量が決まっているとする．ある枝が事故で切れてしまうとする．この枝を通る電力が増えすぎて最大容量を超えてしまった，と解釈してもよい．電力の需要は元のままなので，その枝を通っていた電力は，他の電線で出発地と目的地を結ぶ経路が短いもの（最短路にとることが多い）を迂回するようになる．すると，迂回道にある枝の負荷が増えて，容量を超えてしまうかもしれない．もしそうなれば，この枝も切れてしまい，通っていた電力は，さらなる迂回路に回される．このような連鎖が続くと，電力網は連鎖（カスケード）的に，雪崩のように機能停止し，電力輸送ができなくなる．ネットワークの形とカスケード故障の起こりやすさの関係，カスケード故障を防ぐための方策，などが研究されている（例えば文献[23])．

3.6　同期

各頂点が状態変数を持ち，枝でつながれた2頂点同士が，自分たちの状態をやりとりして，相手に同調しようとしているとする．すると，ネットワークの形，結合の強さ，状態変数の詳細などに応じて，ネットワークが全体として同調，すなわち同期できるかどうか，が異なる．神経系の同期活動の機能の説明や制御，人間や動物の集団行動，生態系の保全，通信など様々な応用もある．同期の研究は，日本の強い分野でもある[12]．例えば，各頂点の状態が円周上の1点だとすると，時間が経つに連れて同期が進んでいく様子は図9のようになる．

ネットワーク上の同期現象は，2000年ごろから解析され始めた．スモールワールドやスケールフリー，あるいは他の複雑ネットワークが同期しやすいかどうかは，一概にはいえない．様々な結果が蓄積されつつある（日本語の解説に文献[10][11][12][19][26])．

4.　おわりに

以上，複雑ネットワークの研究を，ダイナミクスと

その応用に焦点をあてて概観した．複雑ネットワーク研究は，理論と応用の両面について，この紙面では紹介しきれない広がりを見せている．そして，学際的領域の例に漏れず，諸分野の研究者が参画している．ネットワークと見なされるデータや問題があれば，研究が始まりうる．問題解決のためのアプローチも，数学，物理学，モンテカルロ・シミュレーション，実験室における実験，社会調査，実装など幅広い．より詳しくは，本稿の引用文献などを参照していただきたい．

参考文献

[1] R. Albert and A.-L. Barabási: "Statistical mechanics of complex networks," *Review of Modern Physics*, 74: 47-97, 2002.

[2] A.-L. バラバシ（青木薫訳）:『新ネットワーク思考』, NHK 出版, 2002.

[3] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D.-U. Hwang: "Complex networks: structure and dynamics," *Physics Reports*, 424: 175-308, 2006.

[4] マーク・ブキャナン（阪本芳久訳）:『複雑な世界，単純な法則』, 草思社, 2005.

[5] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes: *Evolution of networks*, Oxford University Press, 2003.

[6] P. Grassberger: "On the critical behavior of the general epidemic process and dynamical percolation," *Mathematical Biosciences*, 63: 157-172, 1983.

[7] 林幸雄:『噂の拡がり方』, 化学同人, 2007.

[8] 林幸雄編:『ネットワーク科学の道具箱』, 近代科学社, 2007.

[9] 今野紀雄，井出勇介:『複雑ネットワーク入門』, 講談社, 2008.

[10] 郡宏: "振動子ネットワークの引き込みと体内時計," 数理科学, 522（2006 年 12 月号）: 62-68, 2006.

[11] 郡宏，増田直紀: "結合振動子における集団引き込みと複雑ネットワーク," 日本ロボット学会誌, 26(1): 6-9, 2008.

[12] 蔵本由紀:『非線形科学』, 集英社新書, 2007.

[13] Y. Kurumida, T. Ogata, H. Ono, K. Sadakane and M. Yamashita: "A generic search strategy for large-scale real-world networks," In *Proceedings of First International Conference on Scalable Information Systems* (*INFOSCALE*), 2006.

[14] 増田直紀，今野紀雄:『複雑ネットワークの科学』, 産業図書, 2005.

[15] 増田直紀，今野紀雄:『「複雑ネットワーク」とは何か』, 講談社ブルーバックス, 2006.

[16] 増田直紀:『私たちはどうつながっているのか』, 中公新書, 2007.

[17] 増田直紀: "複雑ネットワーク上のランダムウォーク," 数理科学, 523（2007 年 1 月号）: 61-67, 2007.

[18] 増田直紀: "ネヴァンリンナ章業績紹介/クラインバーグ," 数学セミナー, 2007 年 3 月号, 41-45, 2007.

[19] 増田直紀，郡宏: "複雑ネットワーク：導入およびシナプス可塑性との関係," 日本神経回路学会誌, 14(3): 173-185, 2007.

[20] 増田直紀: "複雑ネットワーク上のパーコレーション," 数学セミナー, 2008 年 6 月号, 50-54, 2008 年 7 月号, 60-64, 2008.

[21] 増田直紀: "ネットワーク上の進化ゲーム," 人工知能学会誌, 印刷中, 2008.

[22] R. M. May: "Network structure and the biology of populations," *Trends in Ecology and Evolution*, 21: 394-399, 2006.

[23] A. E. Motter: "Cascade control and defense in complex networks," *Physical Review Letters*, 93: 098701, 2004.

[24] M. E. J. Newman: "The structure and function of complex networks," *SIAM Review*, 45: 167-256, 2003.

[25] M. Newman, A.-L. Barabási and D. J. Watts: *The structure and dynamics of networks*, Princeton University Press, 2006.

[26] 西川崇: "結合振動子ネットワークの同期現象," 数理科学, 518（2006 年 8 月号）: 42-47, 2006.

[27] H. Ohtsuki, C. Hauert, E. Lieberman and M. A. Nowak: "A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks," *Nature*, 441: 502-505, 2006.

[28] G. Szabó and G. Fáth: "Evolutionary games on graphs," *Physics Reports*, 446: 97-216, 2007.

[29] J. Travers and S. Milgram: "An experimental study of the small world problem," *Sociometry*, 32: 425-443, 1969.

[30] D. J. Watts: "The "New" science of networks," *Annual Review of Sociology*, 30: 243-270, 2004.