

# ジャンプ拡散過程における デルタヘッジの要諦

伊藤 翔, 宮崎 浩一

## 1. はじめに

オプション評価式が Black and Scholes (以下, Black and Scholes は BS と略す) によって与えられてから 30 年以上経過した今日では, オプションが金融商品の一つであり, 「所定の期日 (満期  $T$ ) に原資産をあらかじめ定められた価格 (権利行使価格  $K$ ) で売買する権利」であることぐらいは, 金融関係者のみならず広く知られるようになった。また, BS 式に関する解説書は数多く出版されており, BS 式の主な導出法としてリスク中立評価法とデルタヘッジ法の 2 通りが示されている (例えば宮崎[4]を参照)。

金融の実務と直接関連するデルタヘッジ法に関してみると, BS 式の導出に際しては, 連続的にヘッジ可能であるといった非現実的な仮定が課されており, この仮定がどの程度のものであるか, 具体的には, 連続的にヘッジできない現実の状況下ではどの程度のヘッジ誤差が生じるのかについて検討した文献は極めて少なく Kamal and Derman[1], 矢萩・宮崎[6]が挙げられるに留まる。前者では, 株価過程として BS モデルと同様に幾何ブラウン運動 (株価収益率は一般化ウィナー過程) を仮定して株価のサンプルパスを数多く発生させ, 各株価のサンプルパスに対してデルタヘッジを行った際に収益が 0 から乖離する (オプションを連続的にヘッジすることが可能なら 0 から乖離しない) 程度やバイアスなどを検討している。また, 後者では, 売却するオプションに織り込まれている満期までの価格変動率 (インプライド・ボラティリティ) が実現するボラティリティよりもどの程度大きければ, 連続的にデルタヘッジができない現実の状況下におい

ても一定の有意水準の下で収益を上げられるかについて売買コストを含めたシミュレーションに基づき考察した。

上記の先行研究は, 何れも株価過程として幾何ブラウン運動 (株価収益率は一般化ウィナー過程) を仮定している。しかし, 現実には大きなニュースが発生する際には, 株価がジャンプすることがしばしばみられるため, 株価過程が幾何ブラウン運動に従う場合のみを検討するだけでは不十分である。そこで, 本研究では株価過程がジャンプを含んでいる場合のデルタヘッジ収益のばらつきに関して考察する。ジャンプを含むプロセスの歴史は古く, Merton Jump Diffusion model ([3], 以下 MJD モデル) に遡る。その後, 1990 年代後半から今日に至るまでレビ過程の枠組みで拡張されてきた。ここでは, レビ過程の中で [ブラウン運動+複合ポアソン] の形で記述できるモデルに焦点を当てて, その代表として上記の MJD モデルに加えてジャンプの大きさが上下で非対称な指数分布に従うような Kou モデルを採り上げる。そして, オプショントレーダーが BS デルタ量に基づきデルタヘッジを行うと, 先行研究に見られる収益の 0 からの乖離の程度やバイアスなどが MJD モデルや Kou モデルにおけるパラメータに対してどの程度の感応度を持つかについて確認する。これによって株価がジャンプを含むプロセスに従う状況下で離散的にデルタヘッジした場合の収益に関する有益なリスク管理ツールになると考えられる。

本論文の構成は, 以下の通りである。次節では, 株価過程が幾何ブラウン運動に従う場合, MJD モデルまたは Kou モデルに従う場合の 3 通りに分けて説明し, それぞれのデルタヘッジについて解説する。節 3 では, 数値実験の手法, 結果と考察について述べる。最終節では, まとめと結語を付す。

いとう しょう, みやざき こういち  
電気通信大学 電気通信学部  
〒182-8585 調布市調布ヶ丘 1-5-1  
受付 06.12.27 採択 07.11.28

## 2. 株価過程とデルタヘッジ

### 2.1 株価過程

BS モデルにおいて株価過程は、リスク中立測度の下で式(1)のような幾何ブラウン運動に従うと仮定されている。

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma d\tilde{W}_t \quad (1)$$

ここで  $r$  は無リスク金利、 $\sigma$  はボラティリティ、 $d\tilde{W}_t$  はリスク中立測度におけるウィナー過程となる。式(1)において、 $rdt$  は株価リターンのトレンドを表すドリフト項であり、 $\sigma d\tilde{W}_t$  は株価リターンの変動を表す確率項である。よって、BS モデルにおける単位時間当りの株価リターンは、標準偏差（ボラティリティ）が  $\sigma$  の正規分布に従うことになる。また、株価過程が幾何ブラウン運動に従うと仮定されている場合のオプション評価式いわゆる BS 式は以下に示す通りである。

$$BS(S_t, T-t, K, \sigma^2, r) = S\Phi(d_1) - K \exp(-r(T-t))\Phi(d_2) \quad (2)$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

続いて本研究で注目した、ジャンプ拡散過程について述べる。まず初めに、MJD モデルを採用する場合を考える。MJD モデルでは株価リターンを表現するために一般化ウィナー過程にジャンプ過程を加えたもので、式(3)のようにモデル化される。

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r-a)dt + \sigma_{MJD}d\tilde{W}_t + (\exp(\omega + \eta\varepsilon) - 1)d\tilde{N}_t \quad (3)$$

ここで  $\sigma_{MJD}$  は株価リターンの連続的な変動の大きさを表す拡散係数であり、 $d\tilde{W}_t$  はリスク中立測度におけるウィナー過程、 $d\tilde{N}_t$  はリスク中立測度の下でインテンシティ（以下、強度と呼ぶ）が  $\lambda$  のポアソン過程である。 $\exp(\omega + \eta\varepsilon)$ （以下、これを  $J$  とおく）は、ジャンプが発生した際のジャンプ幅であり、ジャンプ幅が平均  $\omega$ 、分散  $\eta^2$  の正規分布に従うことを表している。ドリフト項の  $a$  は、式(3)の第3項の期待値に相当しており、「ジャンプ幅率 ( $J-1$ ) の期待値」と「ジャンプ回数の期待値」の積として算出され、式(3)の第1項のようにドリフト項において  $a$  を無リスク金利から差し引くことによって株価リターンの期待値は無リスク金利  $r$  となる。式(3)で与えられる確率

微分方程式の解として、時刻  $t+\Delta t$  の株価  $S_{t+\Delta t}$  は式(4)のように時刻  $t$  における株価  $S_t$  を用いて表せる。

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left\{\left(r - \alpha \frac{\sigma_{MJD}^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_{MJD}d\tilde{W}_{\Delta t} + \sum_{j=1}^{N_{\Delta t}} \ln(J_j)\right\} \quad (4)$$

ここで、 $N_{\Delta t}$  は微小時間  $\Delta t$  におけるジャンプの回数、 $J_j$  は  $j$  回目のジャンプの幅である。式(4)から単位時間 ( $\Delta t=1$ ) の株価リターン  $X_{\Delta t} = \ln(S_{t+\Delta t}/S_t)$  が従う分布の標準偏差  $\sigma$  は式(5)で与えられる。

$$\sigma^2 = \sigma_{MJD}^2 + \lambda\eta^2 + \lambda\omega^2 \quad (5)$$

ここで、株価リターンにジャンプを含まない BS モデルのボラティリティと MJD モデルのボラティリティとの相違点をそれぞれ2乗した分散の形で確認しておく。BS モデルのボラティリティがすべて拡散項から得られるのに対して、式(5)をみると MJD モデルのボラティリティは、拡散項から得られる  $\sigma_{MJD}^2$  とジャンプ過程から得られる  $\lambda\eta^2 + \lambda\omega^2$  から構成されることがわかる。また、ジャンプ過程から得られる  $\lambda\eta^2 + \lambda\omega^2$  は、強度とジャンプ幅の分散との積から成る  $\lambda\eta^2$  と、強度とジャンプ幅の平均の2乗との積から成る  $\lambda\omega^2$  との和であることがわかる。式(4)で与えられる解から式(5)の標準偏差を導出する詳細は佐々木・宮崎・野村[5]を参照されたい。また株価過程が MJD モデルに従う際にオプションの価格は Merton[3]にあるように式(6)を用いて算出できる。

$$F_{MJD}(S, T-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda(T-t))(\lambda(T-t))^n}{n!} \times f_n(S, T-t) \quad (6)$$

$$f_n(S, T-t) = BS(S, T-t, K, v_n^2, r_n)$$

$$v_n^2 = \sigma^2 + n\eta^2 / (T-t)$$

$$r_n = r - \alpha + \frac{n(\omega + \eta^2/2)}{T-t}$$

$$\lambda = \lambda(1 + \alpha/\lambda)$$

本研究で注目したもう1つの代表的なジャンプ過程である Kou モデルは、株価リターンを表現するために一般化ウィナー過程に MJD モデルとは異なるジャンプ過程を加えたもので、式(7)のようにモデル化される。

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r-\beta)dt + \sigma_{kou}d\tilde{W}_t + (V-1)d\tilde{N}_t \quad (7)$$

ここで、 $\sigma_{kou}$  は MJD 同様に株価リターンの連続的な変動の大きさを表す拡散係数であり、 $d\tilde{W}_t$  はリスク中立測度におけるウィナー過程、 $d\tilde{N}_t$  はリスク中立測度のもとでの強度  $\lambda$  のポアソン過程であることも

MJDと同様である。MJDモデルとの違いとして、ジャンプ幅に違いがあり、Kouモデルにおいてジャンプ幅  $V$  は非対称のダブル指数分布密度関数である。ジャンプ発生時におけるジャンプ幅は毎度が独立で同一の分布の列であり、非負の確率変数である  $\gamma = \log(V)$  としてみると、非対称の2乗指数分布密度関数であるので、式(8)のように表現できる。

$$f_\gamma(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{y \geq 0} + q\eta_2 e^{-\eta_2 y} 1_{y < 0}, \quad (8)$$

$$\eta_1 > 1, \eta_2 > 0$$

ここで、 $p, q$  はそれぞれ上方向と下方向のジャンプの確率であり、 $p, q$  は  $p+q=1, p, q \geq 0$  という条件を持つ。式(8)を書き換えると式(9)のようになる。

$$\log(V) = \gamma = \begin{cases} \xi^+ & \text{with probability } p \\ -\xi^- & \text{with probability } q \end{cases} \quad (9)$$

ここで用いられている  $\xi^+$  と  $\xi^-$  は指数分布における確率変数であり、平均はそれぞれ  $1/\eta_1$  と  $1/\eta_2$  である。また、 $d\tilde{W}_t, d\tilde{N}_t, \gamma$  はそれぞれ独立である。式(7)の  $\beta$  はMJD同様「ジャンプ幅率  $V-1$  の期待値」と「ジャンプ回数の期待値」の積であり、ジャンプ幅  $V$  の期待値は式(10)に示すとおりである。

$$E(V) = E(e^\gamma)$$

$$= p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} \quad \eta_1 > 1, \eta_2 > 0 \quad (10)$$

MJDモデルとKouモデルはジャンプ幅を表現している確率変数のみ異なり、ジャンプの発生に関する確率変数は同じである。Kouモデルにおいて式(4)を考える際には、ジャンプ幅  $J_i$  が  $V_i$  になったと考えればよい。またKouモデルにおける標準偏差  $\sigma$  は、式(11)で与えられる。

$$\sigma^2 = \sigma_{kou}^2 + \lambda \left\{ pq \left( \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right)^2 + \left( \frac{p}{\eta_1^2} + \frac{q}{\eta_2^2} \right) \right\}$$

$$+ \lambda \left( \frac{p}{\eta_1} + \frac{q}{\eta_2} \right)^2 (1 - \lambda) \quad (11)$$

ここでは、拡散項から得られるボラティリティは  $\sigma_{kou}^2$  であり、残りの部分がジャンプ過程から得られるものである。また、株価過程がKouモデルに従う際にオプションの価格は式(12)を用いて算出できる。

$$F_{kou}(S_t, T-t) =$$

$$S_t Y \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 - \beta, \sigma, \tilde{\lambda}, \tilde{p}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2; \right.$$

$$\left. \log \left( \frac{K}{S_t} \right), T-t \right)$$

$$- K e^{-r(T-t)} Y \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \beta, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; \right.$$

$$\left. \log \left( \frac{K}{S_t} \right), T-t \right) \quad (12)$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{1 + \beta/\lambda}, \tilde{\eta}_1 = \eta_1 - 1, \tilde{\eta}_2 = \eta_2 + 1, \tilde{\lambda} = \beta + \lambda$$

$$Y(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) = P\{Z(T) \geq a\}$$

Kouモデルにおいて、 $Z(T)$  は式(7)にある  $S_t$  の満期  $T$  における分布を表す確率変数である。詳しい導出はKou[2]を参照されたい。

本研究の主たる関心は、BSモデルのボラティリティと各ジャンプモデルのボラティリティを揃えたうえで、次節で示すデルタヘッジを行うことであり、デルタヘッジ誤差が生じる構造を把握した上で、デルタヘッジ誤差がBSモデルの場合より大きくなることを確認し、その大きさやバイアス、各パラメータに対する感応度などを検討することである。

## 2.2 デルタヘッジ

ここでは、デルタヘッジとして、株式のコール・オプション（以下、オプションと呼ぶ）を売却したりスクを、株式を購入することでヘッジするものを探り上げて説明する。売買が逆の場合も議論は全く同じである。

### 2.2.1 株価過程が幾何ブラウン運動に従う場合

株価過程（式(1)）に伊藤の公式を適用すれば、オプション価格  $f$  の微小時間の価値の変化  $df$  は式(13)で与えられる。

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma S_t d\tilde{W}_t \quad (13)$$

式(13)において確率項は  $\frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma S_t d\tilde{W}_t$  であり、この部分変動することがオプションのリスクである。オプション  $f$  を1単位売却した場合におけるオプションの価格変動リスクは、株式をデルタ単位  $(\partial f / \partial S_t)$  購入することによりヘッジ可能である。実際、ヘッジしたポートフォリオ  $\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t$  の変動  $d\Pi$  を確認すると、売却したオプションの確率変動と購入した株式の確率変動とが相殺されて式(14)のように確定的な過程となる。

$$d\Pi = - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt$$

$$= r \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t \right) dt = r \Pi dt \quad (14)$$

式(12)は確定的な過程であり、確率項によるリスクが無いためポートフォリオ  $\pi$  のリターンは無リスク金利  $r$  で運用した収益  $r \Pi dt$  に等しく、これらを実際に等式表現したものが、Black-Scholes-Merton（以下、

BSM) 偏微分方程式であり、満期におけるオプションのペイオフを境界条件として BSM 偏微分方程式を解けば、式(2)にあるオプション価格  $f$  を与える有名な BS 公式が得られる。

上記の議論を単純化して表現すると、

$$-(1 \text{ 単位のオプション}) + (\text{デルタ単位の株式}) = (\text{II 単位の割引債})$$

となり、オプションがデルタ量の株式と割引債を用いてダイナミックに複製されることを表している。株式の保有量であるデルタ量の変動は、ボラティリティの大きさに大きく依存し、他のパラメータが同じであればボラティリティが大きくなるほどオプションの複製コスト（オプション価格）は大きくなる。繰り返しになるが、オプションを 1 単位売却して、売却したオプションを複製すべくデルタヘッジを行って得られる収益は 0 となる。しかしながら、現実には連続的にデルタヘッジを行うことができないからわずかながら損益（誤差）が発生し、この誤差に関して議論した文献が節 1 で紹介した Kamal and Derman[1]、矢萩・宮崎[6]である。

### 2.2.2 株価過程がジャンプモデルに従う場合

株価過程は MJD モデルでは式(4)、Kou モデルでは式(4)の  $J_i$  を  $V_i$  とすれば良いことは上述した。このため MJD モデルも Kou モデルもジャンプ幅を  $J$  と統一することで、ここでは同様に扱えるので、ジャンプ幅を  $J$  と置き議論をすすめる。それに合わせて「ジャンプ幅率  $J-1$  の期待値」と「ジャンプ回数の期待値」の積を  $\alpha$ 、連続成分のボラティリティを  $\sigma_J$  とする。また、ジャンプ過程に対し伊藤の公式を適用すれば、オプション価格  $f$  の微小時間の価値の変化  $df$  は式(15)で与えられる。

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} (r-a) S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma_J^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma_J S_t d\tilde{W}_t + (f(JS_t) - f(S_t)) d\tilde{N}_t \quad (15)$$

式(15)において確率変動を与えるのは第 2 項と第 3 項であり、前者が拡散項から生じる連続的な確率変動であり、後者がジャンプ過程から生じる不連続な確率変動となる。オプションを 1 単位売り、デルタ単位の株式を購入して得られるポートフォリオ  $\Pi$  の微小時間の価値変化  $d\Pi$  は、式(16)で与えられる。

$$d\Pi = - \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma_J^2 S_t^2 \right) dt + \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} (J-1) S_t - (f(JS_t) - f(S_t)) \right) d\tilde{N}_t \quad (16)$$

式(16)の右辺における第 1 項目のドリフト項に、ジャンプモデルにおける偏微分方程式(17)を代入して整理すると式(16)で与えたジャンプモデルにおけるデルタヘッジポートフォリオ  $\Pi$  の微小時間における価値変化  $d\Pi$  は、式(18)のように整理できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma_J^2 S_t^2 &= \left( -(r-a) S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + rf \right) dt \\ &\quad - \lambda E[f(JS_t) - f(S_t)] \quad (17) \\ d\Pi &= r \left( -f + \frac{\partial f}{\partial S_t} \right) dt \\ &\quad - \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} E[J-1] S_t - E[f(JS_t) - f(S_t)] \right) dt \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} (J-1) S_t - (f(JS_t) - f(S_t)) \right) d\tilde{N}_t \quad (18) \end{aligned}$$

ここで、デルタヘッジポートフォリオ  $\Pi$  の微小時間における価値変化  $d\Pi$  を、株価過程が幾何ブラウン運動に従う場合（式(14)）と株価過程がジャンプモデルに従う場合（式(18)）に関して比較すると、相違点として後者の場合には、

$$\begin{aligned} &- \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} E[J-1] S_t - E[f(JS_t) - f(S_t)] \right) dt \\ &+ \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} (J-1) S_t - (f(JS_t) - f(S_t)) \right) dN_t \quad (19) \end{aligned}$$

が新たに付加されていることがわかる。式(19)について注目すると、第 1 項は、単位時間あたりのジャンプ成分に関するデルタヘッジポートフォリオの価値変化の期待値を表しており、連続的に表現されている。ここで期待値は、2通りの意味で用いられている。一つは、ジャンプが発生する頻度に関するもので、それはパラメータ  $\lambda$  で表現される。もう一方は、ジャンプ幅に関するもので、株価に関しては  $E[J-1] S_t$  で表され、オプション価格に関しては  $E[f(JS_t) - f(S_t)]$  で表される。これに対し、第 2 項は、ジャンプ成分に関するデルタヘッジポートフォリオの価値変化の実現値（ここでは、第 2 項の確率過程から発生する多くのサンプルの一つ一つという気分を表現するために実現値という用語を採用した）を表しており、不連続である。理論的にこの 2 つの項をヘッジする手法はないが、式(19)の期待値をとれば 0 となり、式(18)は式(14)と同じ枠組みに帰着される。ここで収益が期待値 0 から外れる要因を述べる。第 2 項は満期まで「日々の期待ジャンプ回数」×「日々のジャンプ発生によるデルタヘッジ誤差の期待値」を足し合わせたものであるため、どちらか一方が期待値と異なれば収益にばらつきが生まれる要因となる。まず期待ジャンプ回数との差に着目する。

実現したジャンプが期待値である  $\lambda dt$  ではない場合に、第3項は期待値である第2項より大きくまたは小さくなる可能性があり、これにより収益がばらつく。続いて「日々のジャンプ発生によるデルタヘッジ誤差の期待値」と第3項のジャンプが生じた際の影響に注目する。この2つの決定的な違いとして、株価×デルタである。第2項は日々の株価×デルタが用いられているが、第3項は実際ジャンプが起こったときの株価×デルタである。ここの違いに積として関わっているのはジャンプ幅である。このジャンプ幅が大きければ、当然この差による影響が大きくなり、ばらつきが大きくなる。

本研究のタイトルに、ジャンプ拡散過程におけるデルタヘッジの要諦とあるが、これは、上記に詳述したように式(19)部分が通常の幾何ブラウン運動におけるデルタヘッジとは異なることを明確に指摘したうえで、その相違点がどの程度のマグニチュードであるかについて、次節で示すような検討を与えることにある。

### 3. 数値実験

#### 3.1 基本パラメータ値と実験の手順

オプションの基本パラメータを表1に、MJDモデルの基本パラメータを表2に、Kouモデルの基本パラメータを表3に示した。数値実験の対象となるオプションの基本パラメータを確認すると、現在価格の株価が15,000円、残存期間が60営業日、ボラティリティは日率1.26%（年率20%）、無リスク金利は日率0.02%（年率5%）である。MJDモデルの基本パラメータは、ジャンプの頻度として強ジャンプ（日率0.32回）と弱ジャンプ（日率0.17回）の2通りが用意されている。また、強ジャンプと弱ジャンプの双方において、ジャンプ幅の期待値が正負（±0.008）のいずれの場合も検討する。ここでの大前提は、MJDモデルにおけるどのようなパラメータセットも、式(4)で与えられる出来上がりのボラティリティが日率1.26%（年率20%）となるように設定されていることである。Kouモデルの基本パラメータとして、ジャンプ頻度は日率0.17回、上方ジャンプパラメータ  $\eta_1$  を80, 70, 60, 下方ジャンプパラメータ  $\eta_2$  を60, 70, 80とそれぞれおく。  $\sigma_{kou}$  はKouモデル全体のボラティリティを日率1.26%（年率20%）に合わせるために調節した。

数値実験の基本的な手順は、次に示す(I)~(IV)の通りである。

表1 オプションの基本パラメータ

$S_0$ 円	$T-t$ 日	$\sigma$ %(日率)	$r$ %(日率)
15000	60	1.26	0.02

表2 MJDモデルの基本パラメータ

	$\lambda$ 回/日	$\omega$	$\eta$	$\sigma_{MJD}$ %(日率)
強ジャンプ	0.32	±0.008	0.02	0.34
弱ジャンプ	0.17	±0.008	0.02	1.12

表3 Kouモデルの基本パラメータ

	$\lambda$ 回/日	$p$	$\eta_1$	$\eta_2$
ジャンプ1	0.17	0~1(0.2刻み)	80	60
ジャンプ2	0.17	0~1(0.2刻み)	60	80
ジャンプ3	0.17	0~1(0.2刻み)	70	70

- (I) 1単位売却するオプションの価格を導出する。
- (II) 各モデルに従う株価のサンプルパスを1,000本発生させる。
- (III) サンプルパスごとにデルタヘッジを行う。ただしリバランスは1営業日ごとに行い、リバランスの際のコストは無リスク金利で借り入れる。
- (IV) オプションの売却代金を無リスク金利で運用したもからリバランスの際に借り入れたコストを差し引いた差額を収益（誤差）とする。

#### 3.2 実験結果および考察

節2で述べたように、株価過程がジャンプモデルに従う場合でも幾何ブラウン運動に従う場合と同様にデルタヘッジ収益の期待値は0となる。しかし、パスごとにデルタヘッジを行った収益は0から乖離する。この乖離の主要因として(1)デルタヘッジのリバランスが連続的ではない、(2)株価過程自体にジャンプが加わっているため連続的でない、の2点が挙げられる。Kamal and Derman[1]、矢萩・宮崎[6]は、(1)に関して検討しており、本研究では(1)と(2)を合わせた要因によるデルタヘッジ誤差をジャンプの頻度とジャンプ幅の両面から数値例に基づいて調べる。加えて、(1)と(2)を合わせた要因によるデルタヘッジ収益の標準偏差と(1)の要因のみのデルタヘッジ収益の標準偏差を比較することで、(2)の要因のみによるデルタヘッジ収益の標準偏差の大きさをおよそ把握しておく。具体的には、ジャンプ幅パラメータの平均と分散が共に0の場合にはジャンプは無く、ボラティリティが拡散項のみで生

成されることから、節3.2.2のジャンプ幅パラメータに関するデルタヘッジ収益の感応度分析において、ジャンプ幅パラメータの平均と分散が共に0の場合のデルタヘッジ収益の標準偏差も合わせて掲載する。

### 3.2.1 実現ジャンプ回数とデルタヘッジの収益

ここでは、ジャンプモデルにおけるデルタヘッジ収益をジャンプの頻度とジャンプ幅の両面から考察する。図1, 2には、実験手順(II)において発生させた1,000本のサンプルパスを各パスに含まれるジャンプの回数ごとに分け、各パスに基づいてデルタヘッジを行った際の収益をプロットした。よって、横軸にあるジャンプ回数差とは、各パスにおけるジャンプの実現回数から強ジャンプや弱ジャンプで期待される期待ジャンプ回数を差し引いたものである。図1はMJDモデルのパラメータ値としてジャンプ幅の期待値が正のものを採用した結果であるが、ジャンプ幅の期待値が負の場合も同様の結果であった。また図2のKouモデルに関しては、上方ジャンプ確率が $p=0.6$ 、ジャンプ3のパラメータ値 $\lambda=0.17$ に加えて $\lambda=0.32$ の場合も合わせて示した。図1, 図2から、次の4点が読み取

れる。

#### (実験結果)

- 図1のMJDモデルと図2のKouモデルの収益のばらつきを見ると、ジャンプ回数差と収益との関係にはモデル間の差異が見られない。よって、以下では実験結果を図1に則して言及する。
- 図1においてジャンプ回数の差が $-3$ から $+3$ の範囲を逸脱するパスは概ね強ジャンプの場合である。
- 全体的にジャンプ回数の差がマイナスからプラスへなるに従って、デルタヘッジの収益はプラスからマイナスへと変わるバイアスがあり、このバイアスは、ジャンプ回数の差が $-3$ 以下の領域と $+3$ 以上の領域を比較すると顕著に見られる。
- 図1においてジャンプ回数の差が $-3$ から $+3$ 程度の領域では、強ジャンプと弱ジャンプの場合でデルタヘッジ収益のばらつきに大きな差異は見られない。

#### (実験結果の考察)

第1点は、MJDモデルもKouモデルも共にジャンプの生成がポアソン過程に依拠しているため、実際のジャンプ回数と期待ジャンプ回数との乖離が生み出す収益のばらつきは同様の傾向を示している。

第2点は、強ジャンプの場合( $\lambda=0.32$ )には弱ジャンプの場合( $\lambda=0.17$ )に比べ、期待されるジャンプの頻度 $\lambda$ 自体が大きいため、期待ジャンプ頻度から乖離する程度が割合として同じでも量(回数)としては大きくなることを示している。

第3点は、ジャンプ回数の差が $-3$ 以下の領域と $+3$ 以上の領域に着目して考察する。考察を行うに際して思い返すべきことは、式(5)で与えられる出来上りのボラティリティ(株価のサンプルパス1,000本すべてを考慮した場合)が日率1.26%(年率20%)となっていることである。よって、ジャンプ回数が期待ジャンプ回数より少ないパスは、出来上りのボラティリティ $\sigma$ は日率1.26%(年率20%)以下となり、ジャンプ回数が期待ジャンプ回数より多いパスは、出来上りのボラティリティは日率1.26%(年率20%)以上となる。このため、ジャンプ回数が期待ジャンプ回数より少ないパスを用いたオプションの複製コストは当初のオプション価格よりも小さくデルタヘッジ収益がプラスのバイアスを持ち、ジャンプ回数が期待ジャンプ回数より多いパスを用いたオプションの複製コ

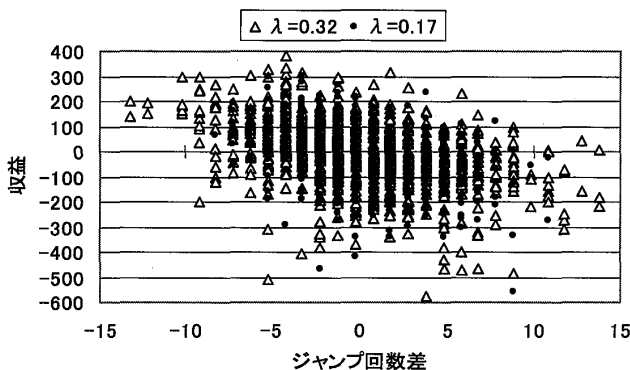


図1 MJDモデルにおける期待ジャンプ回数からの乖離と収益のばらつき

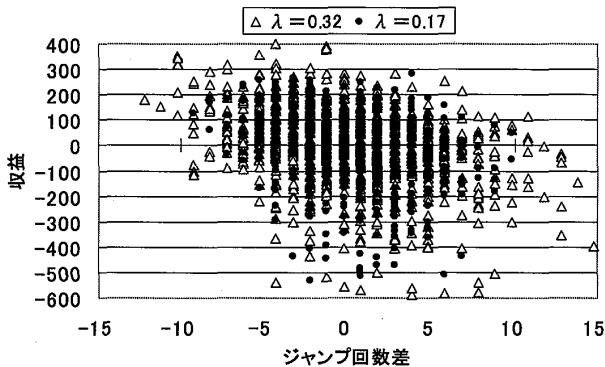


図2 Kouモデルにおける期待ジャンプ回数からの乖離と収益のばらつき

ストは当初のオプション価格よりも大きくデルタヘッジ収益がマイナスのバイアスを持ち、第3点に示した結果を導く。

第4点は、ジャンプ回数の差が-3から+3程度の領域に焦点を当てた考察を行う。この領域では、実現するジャンプ回数は期待ジャンプ回数に概ね同じであるため、ジャンプの頻度に由来するバイアスは少なく、収益は0の周りにばらつくことになる。MJDモデルにおいては、連続成分部分のボラティリティは、表2によると弱ジャンプの方が強ジャンプよりも大きい、連続成分から生じるデルタヘッジ収益は小さいこと、また、ジャンプ幅のパラメータは、弱ジャンプと強ジャンプで同じものを用いているので、この領域におけるデルタヘッジ収益のばらつき具合は、両者の場合で大きくは変わらないことがわかる。

### 3.2.2 ジャンプ幅パラメータに関するデルタヘッジ収益の感応度

まずMJDモデルの結果から見ていく。強度パラメータ $\lambda$ を0.17に固定したうえで、ジャンプ幅の平均パラメータ $\omega$ とジャンプ幅の標準偏差パラメータ $\eta$ を変化させてデルタヘッジ収益の標準偏差がどのように影響を受けるかについて、それぞれ、図3、図4に示した。節3.2.1と同様に、式(5)で与えられる出来上りのボラティリティが日率1.26%（年率20%）となるような設定は維持する。よって、ジャンプ幅パラメータ $\omega$ 、 $\eta$ が大きくなる設定では拡散パラメータ $\sigma_{MJD}$ は小さくなっていることに注意されたい。図3、図4から、次の3点が読み取れる。

#### (実験結果)

- ・ 図3より、ジャンプ幅の平均パラメータ $\omega$ が正負のいずれの方向であれ、0から乖離するに従ってデルタヘッジ収益の標準偏差は増大する。
- ・ 図4より、ジャンプ幅の標準偏差パラメータ $\eta$ が0から乖離するに従って、デルタヘッジ収益の標準偏差は増大する。
- ・ デルタヘッジ収益の標準誤差の水準は、いずれのジャンプパラメータ値の下でも、大きい順にATMオプション、OTMオプション、ITMオプションである。

(注) 上記において、ATMオプション、OTMオプション、ITMオプションとは、コールオプションの場合、順に、権利行使価格が現在の株価に等しい、大きい、小さいオプションのことである。図3、図4では、OTMオプション、ITMオプションの権利行使

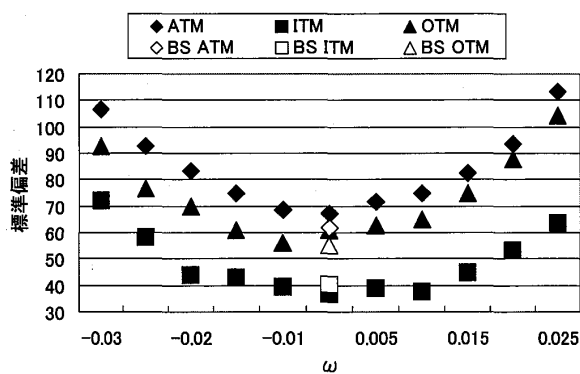


図3 ジャンプ幅の平均 $\omega$ に関する感応度

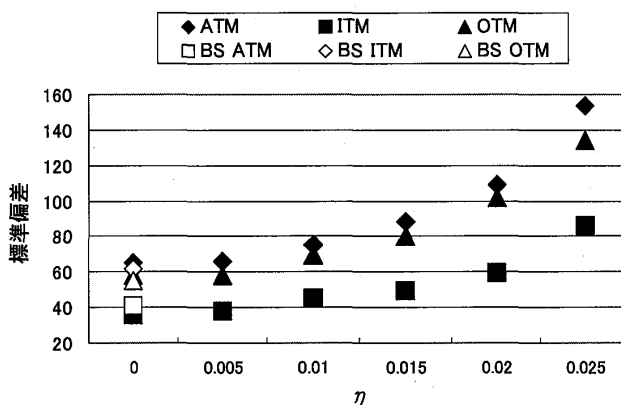


図4 ジャンプ幅の標準偏差 $\eta$ に関する感応度

価格をそれぞれ、16,500円、13,500円とした。

#### (実験結果の考察)

第1点および第2点は、まさに株価過程が連続であるかジャンプを含むかの違いを表現している。ジャンプ幅パラメータ $\omega$ 、 $\eta$ が共に0の場合は、強度パラメータがどのような値をとる場合でも、式(4)から出来上りのボラティリティ $\sigma$ は拡散成分のボラティリティ $\sigma_{MJD}$ から構成されることがわかる。逆に、ジャンプ幅パラメータ $\omega$ 、 $\eta$ が0から乖離することは、強度パラメータ $\lambda$ が0でなければ、株価過程は連続過程のみから成る幾何ブラウン運動とは異なりジャンプを含むMJDモデルとなる。特に、ジャンプ幅パラメータ $\omega$ 、 $\eta$ の0からの乖離が大きくなればなるほど、ジャンプ成分が連続成分よりも強く表れることになる。ジャンプ幅パラメータ $\omega$ 、 $\eta$ が大きくなると、出来上りのボラティリティが日率1.26%（年率20%）に設定されていても、株価の各サンプルパスにおけるジャンプ発生時におけるジャンプ幅が大きくなり、ジャンプ発生時のデルタヘッジ誤差（収益）は極めて大きく、最終的なデルタヘッジ収益のばらつきは、株価が幾何ブラウン運動に従う場合と比較して大きくなる。

第3点は、デルタヘッジを行う際のデルタ量  $\partial f/\partial S_t$  の営業日ごとの変動に依存する。デルタ量が大きく変動するような状況ではデルタ量の日々のリバランスも大きくなり、この影響がデルタヘッジ誤差（収益）の標準偏差の増大となって表れる。通常、株価が動いた場合にデルタ量  $\partial f/\partial S_t$  の変化が最も大きくなるのは、ATM付近であり、ITMやOTMになるにしたがって、株価が動いた場合のデルタ量  $\partial f/\partial S_t$  の変化は緩慢になる（図5を参照）。よって、ジャンプ幅パラメータ  $\omega$ ,  $\eta$  がいずれの水準にあっても、図3, 図4にあるように、ATMオプションのデルタヘッジ誤差の標準偏差が最大となる。

最後に Kou モデルについて見ていく。ジャンプの発生時に Kou モデルは MJD モデルとは異なり、ジャンプ方向の上下の決定とジャンプ幅の決定という2つのプロセスがある。そこで本研究では、MJD モデルにはみられない Kou モデル固有の特徴に注目するために、強度パラメータ  $\lambda$  を 0.17 に固定したうえで、ジャンプ1~3において上方ジャンプ確率  $p$  を変化させた場合に、デルタヘッジ収益の標準偏差がどのように影響を受けるかについて、それぞれ、図6, 図7, 図8に示した。なお、出来上がりのボラティリティが日率 1.26%（年率 20%）となるような設定は維持す

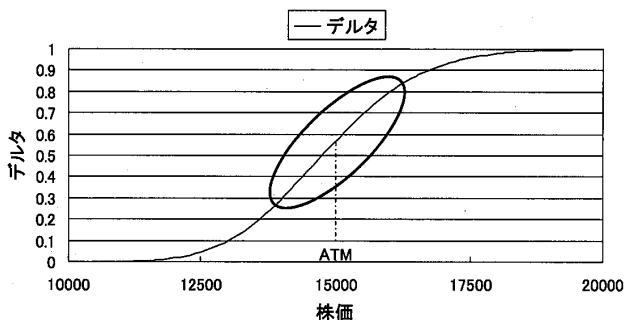


図5 ATM (15000) 付近でデルタは急激に変化

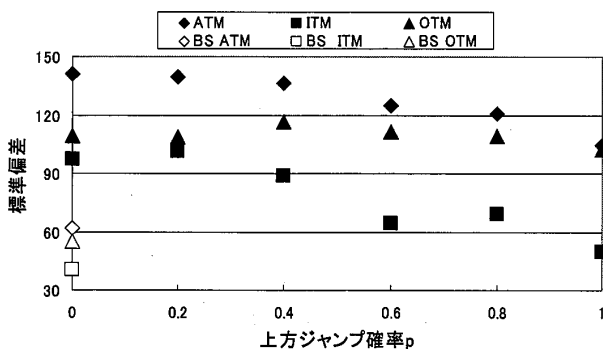


図6  $\eta_1=80$ ,  $\eta_2=60$  における上方確率  $p$  に関する感応度

る。

(実験結果)

- ・ 図6のように下方ジャンプ幅が大きい場合には、ITM, ATM オプションは下方ジャンプの発生する確率  $(1-p)$  が大きくなるにつれて標準偏差が大きくなっていく。
- ・ 図7の上方ジャンプ幅が大きい場合には、OTM, ATM オプションは上方ジャンプの発生確率  $p$  が大きくなると標準偏差が大きくなる。
- ・ どちらの方向のジャンプ幅も同じならば、標準偏差は上方ジャンプの発生確率  $p$  に関する感応度をあまりもたない。

(実験結果の考察)

図6は下方ジャンプ幅が大きい場合である。上方、下方ジャンプの幅の平均はそれぞれ  $1/\eta_1$  と  $1/\eta_2$  であるので、図6では  $\eta_1 > \eta_2$  であるから  $1/\eta_1 < 1/\eta_2$  となるため、図6では下方ジャンプ幅が大きいことになる。ITM, ATM オプションでは下方ジャンプの発生確率  $(1-p)$  が高くなるにつれて（図6の左側に近づくにつれて）、標準偏差が大きくなる。これはジャンプによって構成されるボラティリティが大きくなるからである。OTM オプションには影響が少ない理由とし

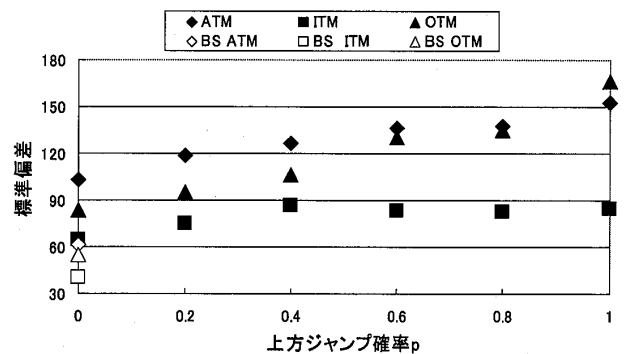


図7  $\eta_1=60$ ,  $\eta_2=80$  における上方ジャンプ確率  $p$  に関する感応度

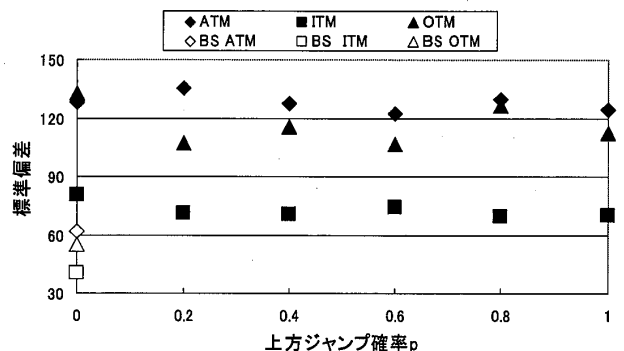


図8  $\eta_1=70$ ,  $\eta_2=70$  における上方ジャンプ確率  $p$  に関する感応度



て、図5のデルタの変動から説明できる。株価が下落してもOTMではデルタがあまり変動しないので下方ジャンプの影響は小さくばらつきに大きな変化は見られない。このことは、図7においても同様である。図7では、上方ジャンプ幅が大きい場合であるので、上方ジャンプの発生確率 $\rho$ による影響はOTM、ATMほど顕著に出ており、その理由は図6と同様である。最後に図8のジャンプ幅が上方、下方ともに等しい場合を確認しておく。この場合、上記の議論によればデルタヘッジ収益の標準偏差が上方ジャンプの発生確率 $\rho$ によってうける影響は小さいことが想定されるが、事実、図8からはそのことが読み取れる。以上から上方、下方のジャンプ確率を外生的に与えることができるKouモデルは、上方、下方へのジャンプ幅が異なれば、ジャンプ発生時における上方、下方のジャンプの確率によってボラティリティが変化するので、それに応じてデルタヘッジ収益のばらつき（標準偏差）は大きくなる。

#### 4. まとめと結語

本研究では、連続成分に加えてジャンプ成分も含むモデルとしてMJDモデルとKouモデルに注目し、株価がそれらのモデルに従う場合に、まず、デルタヘッジ誤差（収益）がジャンプ回数差、ジャンプ幅の2つの点から生じることを明確に指摘した。次に、ジャンプパラメータに関するデルタヘッジ誤差（収益）のばらつきのマグニチュードや感応度を数値例によって検証し、数値例が理論と整合的であることを確認した。

また、ジャンプ幅の特性がOTM、ITMのオプションを用いたときのばらつきにどのような影響を与えるかについて確認した。

本研究は、株価プロセスがジャンプを含むような振る舞いをする状況下において、BSデルタを用いて離散的にデルタヘッジを行った場合に、どの程度までデルタヘッジの収益にばらつきが生じるかについて明確に標準偏差の形で提示したものであり、オプション取引の実務に携わる方々がデルタヘッジを行う際にそのリスクの程度を把握するツールとなれば幸いである。

#### 参考文献

- [1] M. Kamal and E. Derman: Correcting Black-Scholes, *Risk*, (1999) 82-85.
- [2] S.G. Kou: A Jump-Diffusion Model for Option Pricing, *Management Science*, (2002) 1086-1101.
- [3] R.C. Merton: Option Pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, 3 (1976) 125-144.
- [4] 宮崎浩一: 『証券分析への招待』, サイエンティスト社, (2005).
- [5] 佐々木豊史, 宮崎浩一, 野村哲史: Edgeworth展開に基づくオプション評価~原資産収益率がMertonのJump-Diffusionモデルに従う場合~, *応用統計学*, 32, No.2 (2006) 113-128.
- [6] 矢萩一樹, 宮崎浩一: デルタヘッジによる収益の不確実性に関する検証モデル, *情報処理学会論文誌: 数理モデル化と応用*, 46, No. SIG 10 (TOM 12) (2005) 158-171.