

一般化安定結婚問題に基づく研究室配属問題の数理的考察

片岡 達

(関西学院大学大学院理工学研究科情報科学専攻 現所属・㈱日立製作所)

指導教員 茨木俊秀 教授

1. はじめに

通常、大学生は卒業研究を行うために、所属学部のいずれかの研究室に配属される。その際、学生は所望する研究室に配属されたいと考えるが、研究室側の希望も考慮されるべきである。また、研究室の収容人数には制約があり、全学生を希望研究室に配属させることは難しい。そこで本研究では、可能な限り両者の満足度を高める配属を実現させる1つの手法を提案する。

本研究では、問題を(1)学生からの希望調査、(2)研究室定員の決定、(3)配属学生の決定(配属会議)の3段階に分ける。最も重要なのは(3)であり、ここでは安定結婚問題[1]の概念を一般化させ、研究室側の希望も考慮される。合理的な配属を得るため、配属の新しい安定性を定義した上で、明示された半順序と暗黙の全順序という2つの概念を導入し、配属決定アルゴリズムを提案する。さらに、そのアルゴリズムの計算量の解析および計算実験による確認を行う。

2. 学生からの希望調査

学生は、Web画面上で各研究室の希望順位を入力する。順位付けは柔軟に行うことができ、例えば複数の研究室の順位を等しく設定したり、配属されたくない研究室の順位を低く設定したりできる。また、全研究室に対して順位付けを行う必要はなく、順位付けしなかった研究室にも自動的に妥当な順位が設定される。これにより、各学生について、研究室間の配属希望順位を与える半順序が得られる。これを学生により明示された半順序と呼ぶ。一方、研究室側は、初期段階において順位付けを行わず、全学生を同順位に置く。しかし、後述するアルゴリズムの中で順位付けを求められることがあり、最終的に、学生間の受入希望順位を与える半順序が研究室により明示されると考える。

学生 s が研究室 l' よりも l に配属されたいとき、 $l \succ_s l'$ と記す。また、 s が l, l' に同程度配属されたいとき、 $l =_s l'$ と記す。研究室側についても同様に考える。

3. 研究室定員の決定

学生からの希望調査により得られたデータに基づき、研究室の定員を定める。類似の問題として、議員定数配分問題[2]が研究されており、そこで提案されているハンティングトン法を改変して適用させる(詳細略)。

4. 配属の決定

4.1 安定性

配属を決定するために、安定結婚問題[1]における安定マッチングという概念を導入する。標準的な安定結婚問題では、男性と女性が互いに選好順序(相手への好みの順序)を全順序として持ち、これらを入力として Gale-Shapley (GS) アルゴリズムを実行すると、希望順位に関して明らかな矛盾を含まない安定マッチングを生成できる。しかし、GS アルゴリズムは選好順序が半順序である場合には上手く動作しないため、本問題に適用させるために安定性の概念を修正する必要がある。

学生と配属先の研究室の対の集合を \mathcal{M} と記す。 \mathcal{M} 上で学生 s と配属関係にある研究室を $p_{\mathcal{M}}(s)$ 、研究室 l と配属関係にある学生(の集合)を $p_{\mathcal{M}}(l)$ と記す。標準的な安定結婚問題では、ある \mathcal{M} に関してどの $(s, l) \notin \mathcal{M}$ も(表1に示した)厳密不安定ペアでなければ、 \mathcal{M} は安定と見なされる。本研究の設定ではさらに学生および研究室不安定ペアが定義され、これらの不安定ペアが \mathcal{M} に関して存在しないことが求められる。

4.2 明示された半順序と暗黙の全順序

2節において学生により明示された半順序が与えられるが、その半順序における同順位の部分がある基準(例えば研究室の人気順)に基づいて並べることによ

表1 不安定ペア (s, l) の定義

	$l \succ_s p_{\mathcal{M}}(s)$	$l \succeq_s p_{\mathcal{M}}(s)$
$s \succ_l \exists s' \in p_{\mathcal{M}}(l)$	厳密不安定ペア	研究室不安定ペア
$s \succeq_l \exists s' \in p_{\mathcal{M}}(l)$	学生不安定ペア	

り、元の半順序に矛盾しない全順序（暗黙の全順序）を得る。

一方、各研究室は、各自の思惑に基づき各学生を一行に並べた全順序（例えば成績順）を所持していて、これを研究室がもつ暗黙の全順序と呼ぶ。しかし、予めそれを開示するのではなく、後述するアルゴリズムの中で必要に応じてその一部を明らかにする。

ここで、学生と研究室の明示された半順序と暗黙の全順序を区別するのは、どちらも最低限の情報提示（半順序）によって全順序に沿った解を得ることができ、希望順位の提出作業の負担を軽減できるからである。

4.3 配属決定アルゴリズム

配属会議では、学生と研究室の明示された半順序と暗黙の全順序に基づき、配属が決定される。そこで用いられるアルゴリズムを次のように構成する。なお、申出とは、学生を研究室に仮配属させる操作を意味する。

Step 1: 全学生を未配属状態とし、 $t := 1$ とする。

Step 2: 未配属状態の全学生はそれぞれ、まだ拒否されていない研究室の中で、暗黙の全順序において最上位の研究室へ申出を行う。このとき、(仮配属数 + 申出数) が定員を超過する研究室が存在するならば、その全研究室について、定員分の学生を選んで仮配属させ、それ以外の学生からの申出をすべて拒否する。拒否された学生は未配属状態に戻る。

Step 3: 全研究室が定員条件を満たせば、仮配属関係を M として出力して終了。さもなければ $t := t + 1$ として Step 2 へ。

上記アルゴリズムが終了したときの t を T と記す。

4.4 配属の性質と計算量

上記アルゴリズムが生成する解に関して、以下の2つの性質が成立つ。

定理1 配属決定アルゴリズムは、学生および研究室の暗黙の全順序によって定まる一意解を生成する。

定理2 配属決定アルゴリズムは、学生および研究室により明示された半順序に関して、厳密、学生、研究室不安定ペアを持たない解を生成する。

定理1にいう一意解とは、配属会議におけるアルゴリズムの進め方に依存しない解が出力されるという意味である。上記アルゴリズムは、全学生の申出後に全研究室の判断を求めることで、 T を小さく抑え、配属会議をできる限り早期に終了させることを狙っている。

配属決定アルゴリズムには、コンピュータ (PC) による処理と、研究室 (教員) による処理が混在している。これらの計算量については、ある適当な仮定の下、

表2 反復回数 T

	(a)	(b)	(c)
(A)	61	12	6
(B)	147	62	20

以下の定理が成立つ (m : 研究室数, n : 学生数)。

定理3 PCの処理に関する領域量と時間量は、上界は共に $O(mn)$ 、下界は共に $\Omega(mn)$ と評価できる。

定理4 配属会議におけるアルゴリズムの反復回数 T の上界は $O(mn)$ 、下界は $\Omega(mn)$ と評価できる。

5. 計算実験

実際の配属会議では T を小さく抑えることが望まれるため、 T についての考察を行う。まず、配属決定アルゴリズムで示した2箇所の下線部については、(a)1学生を処理した後、1研究室を処理、(b)1学生を処理した後、全研究室を処理、(c)全学生を処理した後、全研究室を処理、などの処理順序が可能である(解の一意性により、配属結果は同じ)。次に、研究室側の暗黙の全順序が T に与える影響を調べるために、(A)学生の希望を尊重して全順序を構成、(B)単に成績順で全順序を構成、という2つの基準を考える。

以上の $3 \times 2 = 6$ パターンの組合せに対し、2005年度関西学院大学・理工学部・情報科学科において実際に行われた研究室配属を参考に、 $n=146$, $m=17$ などの設定に対して計算実験を行った結果を表2に示す。表2を列単位で比較すると処理順序(c)を用いた場合に、また行単位で比較すると全順序(B)を採用した場合に、それぞれ T の値が小さくなり、配属会議の早期終了が期待できる。

6. おわりに

本方式によれば、学生への希望調査の内容は柔軟性と自由度が高いので、満足度を高める結果につながる。研究室(教員)側についても、必要最小限の情報提示で、暗黙の全順序にかなう結果を得ることができる。これらの特徴から、本方式は現実の手法として有効であると期待される。

参考文献

- [1] D. Gusfield and R. Irving: *The stable marriage problem: structure and algorithms*, The MIT Press, 1989.
- [2] T. Ibaraki and N. Katoh: *Resource allocation problems: algorithmic approaches*, The MIT Press, 1988.