

A Landmark Algorithm for the Time-Dependent Shortest Path Problem

大嶋 達也

(京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻 現所属・JFE スチール(株))

指導教員 永持 仁 教授

1. はじめに

本論文では、各枝の長さ（移動時間）が通過開始時刻の関数として与えられているネットワークにおける時刻依存最短路問題を解く高速なアルゴリズムを提案する。一般の時刻依存最短路問題はNP困難であることが知られているが、すべての枝の移動時間がFIFO制約（後述）を満たす場合には、ダイクストラ法を拡張した拡張ダイクストラ法で、最適解を求めることができる[1]。近年、ネットワークに一度前処理を行っておき、以降そのデータを利用して最短路を高速に計算するアルゴリズムの研究が活発に行われている。GoldbergとHarrelson[2]は、 A^* アルゴリズムの一種であるALTアルゴリズムを提案した。一方、時刻依存最短路問題に対しては、これまで有効な前処理およびそれを利用したアルゴリズムが知られていない。本論文では、 A^* アルゴリズムを時刻依存へと拡張し、出力解の最適性を保証する条件を示す。また、時刻依存ALTアルゴリズムを提案して正当性を示し、計算機実験によってその有効性を確認する。

2. 問題定義

節点集合 V と枝集合 $E \subseteq V \times V$ からなる有向グラフ $G=(V, E)$ と各枝 (v, w) ごとに定義された移動時間関数 $l_{vw}(t)$ が与えられている。 $l_{vw}(t)$ はFIFO制約を満たすと仮定する。すなわち、任意の時刻 $t, t_1 \leq t_2$ に対し、 $l_{vw}(t) \geq 0, l_{vw}(t_1) + t_1 \leq l_{vw}(t_2) + t_2$ 。このとき (G, l) をFIFOネットワークと呼ぶ。任意の二節点 $v, w \in V$ 、および時刻 t に対して、出発時刻 t に対する v から w への最短移動時間を $\text{dist}^*(v, w, t)$ と書く。始点 s 、終点 d および始点の出発時刻 t_s の組 (s, d, t_s) をクエリと呼ぶ。時刻依存最短路問題は、FIFOネットワーク (G, l) とクエリ (s, d, t_s) に対して、最短到着時刻 $t_s + \text{dist}^*(s, d, t_s)$ とそれを与える最短パスを出力する問題と定義される。

3. 時刻依存 A^* アルゴリズム

各節点 v に各時刻 t ごとに与えられる時刻依存評価値 $h(v, t)$ を導入する。時刻依存 A^* アルゴリズムでは、拡張ダイクストラ法と同様に各節点 v のラベルの値 $g(v)$ を暫定最短路長として更新していくが、更新する節点を選ぶための各節点 v の優先度として、 $f(v) = g(v) + h(v, g(v))$ を用いる。ただし、 $\{f(v) | v \in V\}$ 上の大小関係 \leq を以下のように定義する。 $f(u) \leq f(v)$ が成り立つ必要十分条件は、(1) $g(u) + h(u, g(u)) < g(v) + h(v, g(v))$ 、または(2) $g(u) + h(u, g(u)) = g(v) + h(v, g(v))$ かつ $g(u) \leq g(v)$ が成り立つことである。時刻依存 A^* アルゴリズムは一般の時刻依存評価値に対しては最適性を保証しない。本論文では、定理1により、FIFOネットワークに対して最適性を保証する時刻依存評価値 h の条件を与えた。

定理1 時刻依存評価値 $h(v, t)$ が条件(i), (ii)をとともに満たすとき、時刻依存 A^* アルゴリズムは最適解を出力する。(i) $v \in V, t_1 \leq t_2$ に対して $h(v, t_1) + t_1 \leq h(v, t_2) + t_2$, (ii) $v, w \in V$ に対して $l_{vw}(t) + h(w, l_{vw}(t) + t) \geq h(v, t)$. \square

関数 $h(v, t)$ が定理1の条件を満たさないときには、アルゴリズムが最適解を出力しない例が存在する。拡張ダイクストラ法は、常に $h(v, t) = 0$ である評価値を用いた時刻依存 A^* アルゴリズムと等価である。本論文では、さらに時刻依存評価値 h が条件 $0 \leq h(v, t) \leq \text{dist}^*(v, d, t)$ を満たすとき、計算終了時の操作済み節点の個数（探索空間サイズと呼ぶ）が、拡張ダイクストラ法よりも小さくなることを示した。また、範囲内であれば大きな評価値ほど探索空間はより小さくなることを示した。

4. 時刻依存 ALT アルゴリズム

与えられたFIFOネットワーク (G, l) に前処理を施し、任意のクエリ (s, d, t_s) に対して、定理1の(i),

(ii)の条件, および $0 \leq h(v, t) \leq \text{dist}^*(v, d, t)$ を満たす時刻依存評価値 $h_c(v, t)$ を提案する. 時刻依存評価値 h_c は, FIFO ネットワークにおいて任意の二点間の最短移動時間が三角不等式を満たすという性質を用いて, 以下の手順により求められる. まず, 各枝 (i, j) の長さが $l_{ij} := \min_{\tau} \{l_{ij}(\tau)\}$ と定義されるネットワーク (G, l') における任意の二節点 $v, w \in V$ 間の最短移動時間を $\text{dist}'(v, w)$ と定義する. (1)前処理として, はじめにランドマークと呼ばれる k 個の節点 $L = \{L_1, \dots, L_k\} \subseteq V$ と p 個のサンプリング時刻 $T_p = \{t_1, \dots, t_p\}$ を用意し, 各ランドマーク L_i から他の各節点 $v \in V - \{L_i\}$ への出発時刻 t_i における最短移動時間 $\text{dist}^*(L_i, v, t_i)$, および $\text{dist}'(L_i, v)$ を保持する. (2)入力クエリ (s, d, t_s) に対して, 各節点 v と各時刻 t ごとの時刻依存評価値 $h_M(v, t)$ と $h_S(v, t)$ を以下のように定義する.

$$h_M(v, t) = \max\{0, \max_{L \in L} \{\text{dist}'(L, d) - \text{dist}'(L, v)\}\},$$

$$h_S(v, t)$$

$$= \max\{0, \max_{L \in L} \{\text{dist}'(L, d, \alpha_{Lv}(t)) + \alpha_{Lv}(t) - t\}\}.$$

ただし, 任意の $L \in L, v \in V$, 時刻 t に対して, $\alpha_{Lv}(t) = \max\{\tau \in T_p, \text{dist}^*(L, v, \tau) + \tau \leq t\}$ と定義される. $\alpha_{Lv}(t)$ が存在しない時刻 $t < \text{dist}^*(L, v, t_i) + t_i$ では $h_S(v, t) = 0$ とする. (3)時刻依存評価値 h_c として, $h_c(v, t) = \max\{h_M(v, t), h_S(v, t)\}$ とする. 本研究では, 時刻依存評価値 h_c が定理1の(i), (ii)の条件, および $0 \leq h_c(v, t) \leq \text{dist}^*(v, d, t)$ を満たすことを示した. これを用いた時刻依存 A^* アルゴリズムを時刻依存 ALT アルゴリズムと呼ぶ.

5. 計算実験と考察

本研究では, 時刻依存 ALT アルゴリズムの性能を調べるための計算機実験を行った. 問題例として, 節点数約 120 万, 枝数約 380 万のアメリカ北西部の地図データを用いた. 枝の移動時間関数としては, 与えられた非負枝長をもとに各周期に二つのピーク (ラッシュ時間) を持つ周期関数を生成し, これを用いた. 表1に, ランドマーク数とサンプリング数を変え, それぞれ 200 個の節点ペアに対して計算を行った結果の平均を示す. 表で $|L|$ はランドマーク数を表し, C- p は p 個のサンプリングを使った結果を表す. また, ロー

表1 拡張ダイクストラ法と時刻依存 ALT アルゴリズムの比較

$ L $	C-1		C-2		C-4	
1	0.90	1.28	0.91	1.29	0.89	1.29
4	2.30	3.27	2.35	3.32	2.28	3.35
9	3.82	6.12	3.88	6.37	3.85	6.59
16	3.54	7.15	3.60	7.55	3.42	7.77

マン体は拡張ダイクストラ法と時刻依存 ALT アルゴリズムの計算時間の比を, イタリア体は探索空間サイズの比を表す. 参考として拡張ダイクストラ法の平均計算時間は 1.153 [秒], 探索空間サイズは 613512 [節点] である.

時刻依存評価値 h_c は, より多くのランドマークおよびサンプリングを用いた場合に各節点, 各時刻で値が大きくなるという性質があり, 一見できるだけ多くのランドマークとサンプリングを用意するのが望ましい. しかし, 計算時間とランドマーク数およびサンプリング数の間にはトレードオフが発生していることを表1は示している. 表1から, ランドマーク数が 9, サンプリング数が 2 のとき, 拡張ダイクストラ法よりも平均して 4 倍程度の高速化が得られたことがいえる.

6. まとめ

本研究では, 時刻依存 A^* アルゴリズムを提案し, その最適性を保証する条件を示した. さらに条件を満たす時刻依存評価値を提案し, 計算機実験により 120 万節点のネットワークで 4 倍程度の高速化が可能であることを確認した. 今後の課題として, 与えられた座標情報を利用して評価値計算のオーバーヘッドを減らし, 計算時間を高速化すること, 他の時刻依存でない既存手法を時刻依存へ拡張し提案アルゴリズムと組み合わせることなどが挙げられる.

参考文献

- [1] S. E. Dreyfus. An appraisal of some shortest-path algorithms. *Operations Research*, 17(3): 395-412, 1969.
- [2] A. V. Goldberg and C. Harrelson. Computing the shortest path: A^* search meets graph theory. In *SODA 2005*, pages 156-165. SIAM, 2005.