ORメモランダム

解けないパズルをLPで解く

―ペグソリティアとパゴダ関数と線形計画―

松井　知己

1. ペグソリティア

ペグソリティアというパズルを御存知だろうか？図1のような穴の開いた盤にペグを刺して遊ぶパズルである．図1中の黒丸（白丸）は，ペグが刺さっている（いない）ことを表している．通常用いられる図1のような盤はEnglish boardと呼ばれる．

図2(a)のように連続する3つの穴の1つ目と2つ目にペグが有り，3つ目の穴にペグが無いとき，図2(b)のように飛び越えて中央のペグを除き，図2(c)のように1つのペグを残すことができる．この操作をジャンプと呼ぶ．ジャンプを実行できる3つの穴の並びは，縦の上から下，縦の下から上，横の右から左，横の左から右の4通りがある．ペグソリティアは，与えられた初期配置から，ジャンプを繰り返し行って，（与えられた）最終配置に到達する手順を探すパズルである．

あるペグ配置に対し，ペグが刺さっていない所にペグを刺し，ペグが刺さっている所にはペグを刺さない配置を，補配置と呼ぶ．例えば図1の補配置は，中央の5箇所のみにペグが刺さっている配置となる．では次のような問題を考えよう．

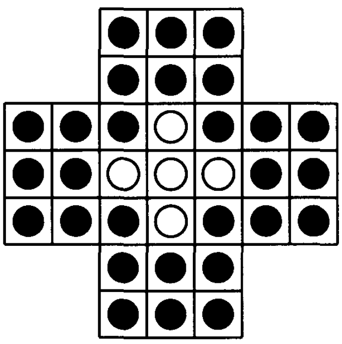


図1　English boardの初期配置例．図中の●（○）はペグの刺さっている穴（いない穴）を表す．

まつい　ともみ
中央大学 理工学部
〒112-8551 文京区春日1-13-27

問題1：図1を初期配置として，ジャンプを繰り返し行って，図1の補配置に到達することができるか？

2. 解けないパズル

実は問題1の答は『不可能』である．Berlekamp, Conway and Guyは本[2]において，次のような巧妙な方法でこの問題が解けないことを示している．ゲーム盤の各マス（穴）に図3のような数字を割り当てよう．

任意のペグ配置$\boldsymbol{p}$に対し，ペグが刺さっているマス目の図3での値を合計したものをpag($\boldsymbol{p}$)と書くことにしよう．例えば図1の配置を$\boldsymbol{p}^{s}$と書くとpag($\boldsymbol{p}^{s}$)=4である．また図1の補配置を$\boldsymbol{p}^{f}$と書くとpag($\boldsymbol{p}^{f}$)=6となる．実は図3の値は非常に巧妙に割り当てられており，どの連続する3つのマス目についても，対応する数字を(a, b, c)と書くと，$a+b\geq c$

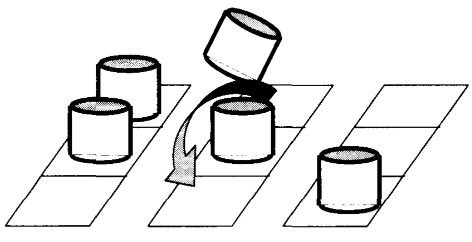


図2　ジャンプの例

		-1	0	-1		
		1	1	1		
-1	1	0	1	0	1	-1
0	1	1	2	1	1	0
-1	1	0	1	0	1	-1
		1	1	1		
		-1	0	-1		

図3　パゴダ関数の例

が成り立っている．連続する3つのマス目の方向は4つあることに注意されたい（ゆえに $a \leq b+c$ も同時に成り立っている）．これより，ある配置 $\boldsymbol{p}^1$ から1回のジャンプ操作で配置 $\boldsymbol{p}^2$ が得られたとき，ペグの取り除かれた2箇所の値の和より，ペグの刺し込まれた場所の値の方が同じか小さい．したがって必ず $\mathrm{pag}(\boldsymbol{p}^1) \geq \mathrm{pag}(\boldsymbol{p}^2)$ が成り立つ．すなわち，ジャンプ操作によって，配置に対する値 $\mathrm{pag}(\cdot)$ は単調非増加となっている[1]．ゆえに，ある配置 $\boldsymbol{p}^1$ から（何回かの）ジャンプ操作で配置 $\boldsymbol{p}^3$ が得られたとき，必ず $\mathrm{pag}(\boldsymbol{p}^1) \geq \mathrm{pag}(\boldsymbol{p}^3)$ が成り立つ．ところが上記の問題では，初期配置 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}$ と最終配置 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}$ は $4=\mathrm{pag}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}})<\mathrm{pag}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}})=6$ を満たしており，このことから初期配置からジャンプ操作で最終配置に到ることは不可能であることが分かる．Berlekamp, Conway and Guy は図3の値を，各マス目に実数を対応させる関数と見なし，パゴダ関数と呼んでいる．この「パゴダ関数」はどこから来たのだろうか？[2]　実は元の問題の線形計画緩和問題を作成してその双対をとると，極めて自然な形でパゴダ関数が導出される．次節でこれを説明しよう．

3．パゴダ関数と双対問題

English board には全部で33箇所のマス目（穴）がある．これらに適当な順番で1から33までの番号をつけて区別をしよう．各ペグ配置に対し，ペグの刺さっている所は1，刺さっていないところは0とした33次元の0-1ベクトルを対応させる．すなわち，任意のペグ配置は33次元の0-1ベクトルとして表すことができる．

ペグ配置 $\boldsymbol{p} \in \{0,1\}^{33}$ から1回のジャンプ操作で $\boldsymbol{p}' \in \{0,1\}^{33}$ が得られたとしよう．すると，$\boldsymbol{p}$ の2つの要素を1から0に変え，1つの要素を0から1に変えたものが $\boldsymbol{p}'$ になっている．対応するジャンプにおいて，ペグを取り除くマス目の番号を s，t とし，ペグを刺し込むマス目の番号を r と書く．ここで33次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ を，第 s，t 要素が1，第 r 要素が -1，残りは0となるベクトルとすると，$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}$ が成り立っている．ベクトル $\boldsymbol{a}$ をジャンプベクトルと呼ぶことにする．

English board には，可能なジャンプは全部で76種類ある（ジャンプの方向は4種類あり，各方向ごとに19種類のジャンプがある）．これら76種類のジャンプに1から76までの通し番号をつけ，対応するジャンプベクトルを並べた行列をジャンプ行列と呼ぶ．すなわちジャンプ行列 $A=(a_{ij})$ は 33×76 の行列で

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & （ジャンプ\ j\ はマス目\ i\ のペグを取り除く）, \\ -1 & （ジャンプ\ j\ はマス目\ i\ にペグを刺し込む）, \\ 0 & （それ以外）, \end{cases}$$

と定義される．

初期配置 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}$ と最終配置 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}$ から $\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}$ へジャンプ操作の繰り返しで到達できるとしよう．このジャンプ操作において，ジャンプ j を行う回数を x'_j とし，これをならべた76次元の非負整数ベクトルを $\boldsymbol{x}'$ とする．このとき等式 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}=\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}-A\boldsymbol{x}'$ が成り立つはずである．ゆえに，初期配置 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}$ と最終配置 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}$ が与えられたとき，線形不等式系

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}-\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \tag{1}$$

が解 $\boldsymbol{x}$ を持たなければ，初期配置から最終配置までジャンプ操作で到達することは不可能であることが分かる．ちなみにこの逆は成り立たない．すなわち，(1)が解を持っていても，初期配置から最終配置までジャンプ操作で到達できるとは限らない．これは，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の整数性を無視していることや，ジャンプの順番という概念が(1)では無視されているためである．

線形不等式系(1)が解を持たなければ，与えられたペグソリティア問題が解けないことが分かるが（逆は成り立たない），『解を持たない』ことを確認するには何を示せば良いのだろう？ **『何かが無いこと』を示すのは一般には容易ではない．線形計画の双対の概念は，これを可能にするのである**[3]（線形計画に興味の無い方は，式(2)の '直前' までスキップしてください）．

線形不等式系(1)を制約に持ち，人工的な（無意味な）目的関数 $\boldsymbol{0}^{\top}\boldsymbol{x}$ を最大化する線形計画問題

$$\mathrm{P1}:\ \max\{\boldsymbol{0}^{\top}\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}-\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

を導入しよう[4]．これの双対問題は

$$\mathrm{D1}:\ \min\{\boldsymbol{y}^{\top}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}-\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}) \mid \boldsymbol{y}^{\top}A \geq \boldsymbol{0}\}$$

---

[1] 配置に対するポテンシャルの類と考えることができる．

[2] 名前の由来は文献[2]を参照のこと．

[3] ここが，筆者が本稿で最も書きたかった文章だ．ちなみに最適性と双対が密接に関わるのも同じ理由である．すなわち，最適性とは『それより良い解が無いこと』であり，やはり『何かが無いこと』に関係する性質となっている．

[4] 目的関数に意味は無いので，最大化でも最小化でも良いのだが，最大化にすると，双対問題D1とパゴダ関数との相性が良い．

となる．主問題P1が許容解を持たないとき，線形計画の基本定理より双対問題D1は許容解を持たないか非有界であることが知られている．しかし双対問題D1は $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ という許容解を持っている．ゆえに，主問題P1が実行不能ならば双対問題D1は非有界となる（すなわち，いくらでも目的関数値を小さくできる）．また，双対問題D1が目的関数値が負となる許容解 $\boldsymbol{y}'$ を持つならば，主問題P1は実行不能であることが以下のように簡単に導かれる．

問題D1は目的関数値が負となる許容解 $\boldsymbol{y}'$ を持ち，問題P1が許容解 $\boldsymbol{x}'$ を持つと仮定すると，$0=\boldsymbol{0}^\top\boldsymbol{x}'\leq\boldsymbol{y}'^\top A\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{y}'^\top(\boldsymbol{p}^s-\boldsymbol{p}^f)<0$ となり矛盾．

上記より，線形不等式系(1)が解を持たない必要十分条件は，線形不等式系

$$\boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{p}^s-\boldsymbol{p}^f)<0,\ \boldsymbol{y}^\top A\geq\boldsymbol{0} \tag{2}$$

が解を持つこととなる[5]．

実は線形不等式系(2)の解こそが前節のパゴダ関数に他ならない．変数ベクトル $\boldsymbol{y}$ はEnglish boardのマス目に対応した33次元ベクトルになっている．制約 $\boldsymbol{y}^\top A\geq\boldsymbol{0}$ 中の各不等式は，ジャンプに関する性質に対応している．例えばジャンプ j を，マス目 s，t からペグを取り除き，マス目 r にペグを刺し込むジャンプとしよう．ジャンプ j に対応するジャンプベクトルは，ジャンプ行列 A の第 j 列であり，これに対応する(2)中の不等式は $y_s+y_t-y_r\geq 0$ となっている．任意のペグ配置 $\boldsymbol{p}\in\{0,1\}^{33}$ に対し，$\mathrm{pag}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{p}$ と定義しよう．すると不等式系 $\boldsymbol{y}^\top A\geq\boldsymbol{0}$ は，前節で記述したパゴダ関数が満たす性質，『任意のジャンプ操作に対し，配置に対する値 $\mathrm{pag}(\cdot)$ は単調非増加となっている』を表していることが分かるだろう．また不等式 $\boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{p}^s-\boldsymbol{p}^f)<0$ は，$\mathrm{pag}(\boldsymbol{p}^s)<\mathrm{pag}(\boldsymbol{p}^f)$ に他ならない．

以上より，次の3つは同値であることが分かる[6]．

1. 配置 $\boldsymbol{p}^s$ から配置 $\boldsymbol{p}^f$ へジャンプ操作の繰り返しで到達できないことを示すパゴダ関数が存在する．
2. 線形不等式系(2)が解を持つ．
3. 線形不等式系(1)が解を持たない．

[5] この性質自体はFarkasの補題から直接導くこともできるし，実はその方が自然でもある．

[6] この同値性自体は文献[1]の5章において触れられており（線形計画の性質を用いない）証明の概略が書かれている．またこの性質の初出はBoardman（1961）と書かれているが，残念ながら文献の記載が無いため詳細は不明である．

実際にパゴダ関数を（存在するならば）求めるには問題D1を解けば良いが，問題D1は最適値が0か，非有界のどちらかなので，例えば $\mathrm{pag}(\boldsymbol{p}^s)$ を1に固定した問題

$$\mathrm{D1}':\ \min\{\boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{p}^s-\boldsymbol{p}^f)\,|\,\boldsymbol{y}^\top A\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{p}^s=1\}$$

を線形計画問題のソフトウェアで解く．問題D1′の最適値が負ならば，与えられたペグソリティア問題は解が無いことが分かる（くどいようだが逆は成り立たない）．問題D1′を用いて「非有界という特殊状況での終了」を避けたことにより，最適値が負ならば最適解として(2)を満たす解，すなわちパゴダ関数を得ることができる．

4. 応用編

著名なパズルデザイナー芦ヶ原伸之の著書[9]で出題されているパズル『(第31棟) 分裂物語』に挑戦してみよう[7]．このパズルでは図4のような右と下に無限に広がったマス目の盤を使う．初めに駒を左上隅に1つ置く．この初期配置から次の規則で駒を移動させる．『ある駒の右隣と真下のマス目が両方空いているとき，もとの駒を取り除いて，右隣と真下の2箇所に1つずつ駒を置くことができる』この操作も，ペグソリティアに合わせてジャンプと呼ぶことにする．

問題2：図4(a)を初期配置として，ジャンプを繰り返し（有限回）行って，左上隅の6マス（図4(f)で□の書かれている所）から駒を無くすことができるか？

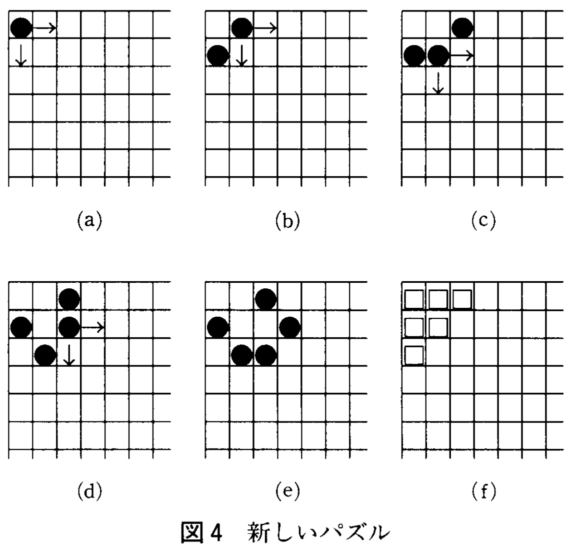


図4　新しいパズル

[7] 初出は『パズル通信ニコリ』（47号，1994年2月10日，ニコリ発行，p. 98）誌上．

驚くべきことに，右と下に無限に広がった盤を使用しても上記の問題の答は『不可能』なのである．しかしながら文献[9]では単に『不可能だった』と書かれており詳細はまったく記載されていない．不可能性の証明としては，川連信[7]による証明があり，瀬山士郎のMathematics Fiction[8]でも読むことができる．以下では計算機を道具に使ってこのパズルに挑戦し，文献[7][8]とは異なる新しい証明が得られるまでを紹介しよう．

無限に広がる盤を相手にするのは困難なので，まずは6×6の小さな盤で考える（6×6の盤での知見を，後に無限の盤へ拡張する）．盤から駒が出てしまうようなジャンプは許さないとする．36個のマス目に1～36の番号をふる．盤上の駒の配置は，駒があるところを1，無いところを0とした36次元の0-1ベクトルで表すことができる．初期配置は，左上隅のマス目に対応する要素のみが1で，他の要素はすべて0の36次元ベクトルである．これを$\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}$と書く．盤から駒の落ちないようなジャンプは5×5=25種類あるので，これにも1～25の番号をつける．ジャンプ行列$B=(b_{ij})$を，36×25の行列とし，

$$b_{ij}=\begin{cases} 1 & (\text{ジャンプ } j \text{ はマス目 } i \text{ の駒を取り除く}), \\ -1 & (\text{ジャンプ } j \text{ はマス目 } i \text{ に駒を置く}), \\ 0 & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

と定義する．ここで，左上隅の6マスに対応する要素がすべて0で，残りの30個のマスに対応する要素がすべて1の36次元ベクトルを$\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}$と書くことにする(前節とは異なり最終配置ではないことに注意せよ．この問題で最終配置は与えられていない)．仮に6×6の大きさの盤に解があるとし，その解でジャンプjを実行する回数をx_jとし，これを並べた25次元ベクトルを$\boldsymbol{x}$とすると，

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}} \geq \boldsymbol{p}^{\mathrm{s}} - B\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \tag{3}$$

という線形不等式系が成り立つ[8]．不等式系$\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}} \geq \boldsymbol{p}^{\mathrm{s}} - B\boldsymbol{x}$は，ジャンプをすべて行った後の配置で，左上隅の6マスには駒が無く，他の30個の各マス目には高々一つの駒しかないことから得られる．もし線形不等式系(3)を満たす解$\boldsymbol{x}$が存在しないならば，6×6の大きさの盤の問題には解が無いことが分かる．

人工的な主問題と，その双対問題をつくると，

$$\mathrm{P2}: \min\{\boldsymbol{0}^{\top}\boldsymbol{x} \mid B\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{p}^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{f}},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

$$\mathrm{D2}: \max\{\boldsymbol{y}^{\top}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}) \mid \boldsymbol{y}^{\top}B \leq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

が得られる[9]．線形計画の基本定理とD2が許容解を持つことから，不等式系(3)が解を持たないことと，

$$\boldsymbol{y}^{\top}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}) > 0,\ \boldsymbol{y}^{\top}B \leq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \tag{4}$$

が解を持つことは必要十分条件となっている（証明は前節同様であるため省略）．

線形不等式系(4)を満たす$\boldsymbol{y}'$があれば，この問題のパゴダ関数（のようなもの）となっていることを解説しよう．まず$\boldsymbol{y}'$は各要素が各マス目に対応した36次元ベクトルである．あるジャンプjを，sのマス目から駒を取り除き，マス目t，rに駒を置く操作としよう．すると，ジャンプ行列Bの第j列ベクトルから作られる$\boldsymbol{y}^{\top}B \leq \boldsymbol{0}$中の不等式は$y'_s - y'_t - y'_r \leq 0$，すなわち$y'_s \leq y'_t + y'_r$であり，何かが増加することを意味しているようだ．任意の駒配置$\boldsymbol{p} \in \{0,1\}^{36}$に対し，$\mathrm{pag}'(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{y}'^{\top}\boldsymbol{p}$と定義すれば，不等式系$\boldsymbol{y}'^{\top}B \leq \boldsymbol{0}$は，『任意のジャンプ操作に対し，配置に対する値$\mathrm{pag}'(\cdot)$は単調非減少である』という性質を意味していることが分かる[10]．ここで$\boldsymbol{y}'^{\top}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}) > 0$と$\boldsymbol{y}'$の非負性も成り立つならば，6×6の大きさの盤は解が無いことが分かる[11]．

では実際に問題D2を計算機で解いてみよう．ただし，非有界となることを避けるために，$\mathrm{pag}'(\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}) = 1$という制約を加えた

$$\mathrm{D2}': \max\{\boldsymbol{y}^{\top}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}} - \boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}) \mid \boldsymbol{y}^{\top}B \leq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y}^{\top}\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}} = 1\}$$

を解く．最適値は5/27であり，(4)を満たす解が最適解として得られた．最適解$\boldsymbol{y}'$は図5のようになり[12]，$1 = \mathrm{pag}'(\boldsymbol{p}^{\mathrm{s}}) > \mathrm{pag}'(\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}) = 22/27$が成り立つため，大きさが6×6の盤は解を持たないことが確認できる．

最後に図5をよーく眺めて構造を見つけてみよう．すると，右と下に無限に広がった盤に使えそうなパゴダ関数として図6のように，公比（1/3）の等比数列5本からなるものがありそうだ．この盤上に，有限個の駒を置いた配置$\boldsymbol{p}$に対し，駒の置かれた場所の値の総和を$\mathrm{pag}^*(\boldsymbol{p})$と書くことにする．このとき，『任意のジャンプ操作に対し，配置に対する値$\mathrm{pag}^*(\cdot)$は単調非減少である』という性質を満たすことが簡単に

[8] 線形不等式系(1)と異なり，(3)には等式が無いことに注意．

[9] ペグソリティアと異なり，主問題は（無意味な）目的関数を最小化している．この理由は次の脚注を参照．

[10] ペグソリティアのパゴダ関数は単調非増加であるのと逆になっている．このパズルでは駒が増えるので，$\mathrm{pag}'(\cdot)$も増えた方が自然だろうと思い，この形式にした．

[11] 易しい練習問題なので省略する．ベクトル$\boldsymbol{p}^{\mathrm{f}}$は最終配置でないため，$\boldsymbol{y}'$の非負性が必要不可欠であることに注意されたい．

[12] なんと，この最適解は端点解ではない！

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)$	0	0
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2$	0
0	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2_*$
0	0	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3$	0	0
0	0	0	$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2_*$	0	0

図5 6×6盤のパゴダ関数．＊印のマス目2つは $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^3$ ではなくて $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2$ となっていることに注意

$$
\begin{array}{|llllll}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & & & \\
\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\
\frac{1}{6} & \ddots & \left(\frac{1}{3}\right)^k & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k & \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^k & \\
 & \ddots & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^k & \ddots & & \\
0 & & & \ddots & &
\end{array}
$$

図6 無限に広がった盤のパゴダ関数

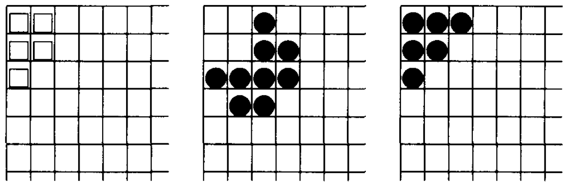
確認できる．

この5本の等比数列の総和は

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)\Big/\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}$$

であり，左上隅の6マスの合計が $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$ であることから，左上隅6マス以外のマス目の値の総和は $\frac{7}{2}-\frac{8}{3}=\frac{5}{6}$ となる．これより，右と下に無限に広がった盤においても，有限回のジャンプ操作で左上隅6マスから駒を追い出すのは不可能であることが分かる．なぜならば，初期配置 $\boldsymbol{p}^s$ に対し $\mathrm{pag}^*(\boldsymbol{p}^s)=1$ であり，$\mathrm{pag}^*(\cdot)$ は単調非減少であるのに，左上隅6マスから駒を追い出してしまうと，$\mathrm{pag}^*(\cdot)$ の値が5/6未満になってしまうからである[13]．

上記の値1と5/6が離れていることから，このパズルをもう少し難しくすることができる[14]．実は（有限回のジャンプでは）図7(a)の左上隅5マスから駒を無くすことも不可能であることが分かる．初期配置（図4(a)）から8手目で図7(b)に到達できることからすると，なかなか信じ難い．また，図7(a)の□の所5箇所に駒を置いた（新しい）初期配置からは，左上隅最奥の1マスを空けることさえ不可能であることが分かる（マニアック過ぎる…）．初期配置が非対称なのは美しくないので，こんな改変はどうだろう『図7(c)の配置から初めて，左上隅最奥の駒を動かしなさい』．このパズルも解くことができない[15]．



(a)　　(b)　　(c)

図7 難しそうなパズル

5．おわりに

ペグソリティアについては，これだけで一冊の本がある[1]．Berlekamp, Conway and Guy の本[2]は，数学パズルのバイブルであろう．第2版は4分冊となっており，第4巻にペグソリティアの節がある．そこで紹介されている peg solitaire army（Conway's soldiers）と呼ばれるパズルは，パゴダ関数に黄金比が出現する美しい証明で有名である．日本語が良いという方は，購入しやすいものとして，最近出た黄金分割に関する好著の翻訳[3]でも証明を読むことができる．筆者は，有限の盤の peg solitaire army の問題を線形計画法で解いてみたところ，パゴダ関数としてフィボナッチ数列が出てきたことに驚愕かつ感動を覚えた経験がある．パゴダ関数と双対問題の関係については，論文[6]で触れられている．ちなみに，不可能性の証明のためにはパゴダ関数は力不足であることも多く，問題P1に「すべての変数は整数」という制約を加えた整数計画がかなり強いことが経験的に確認されている[5][6]．ペグソリティアの最近の結果については，George Bell's Peg Solitaire Page (http://www.geocities.com/gibell.geo/pegsolitaire/) が熱心に更新されているので，参考になる．

2007年に出た「ボードパズルでORを教えよう」という論文[4]においても，ペグソリティアが取り上げられている．

---

13 値5/6は5本の等比数列の総和なので，駒が有限個ならば $\mathrm{pag}^*(\cdot)$ の値が5/6になることはできない．

14 解けないパズルをさらに難しくするって，意味が分かりません．

15 もうやめなさい．

応用編で取り上げたパズルに対し，川連信[7]は本稿とは異なるパゴダ関数を用いて不可能性を示している．興味のある読者は文献[7]または文献[8]をご覧いただきたい．瀬山士郎の本[8]では，このパズルの不可能性の証明をデーン形式の話題の前座として使っている．とても面白い本なのに残念ながら絶版なので，興味のある方は図書館を探すのが良いかもしれない[16]．

参考文献

[1] J. D. Beasley: *The Ins and Outs of Peg Solitaire* (Paperback), Oxford University Press, USA, 1992.

[2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy: *Winning Ways for Mathematical Plays* (2nd Edition), AK Peters, 2004.

[3] A. Beutelspacher and B. Petri, 柳井浩 (翻訳)：『黄金分割—自然と数理と芸術と』, 共立出版, 2005.

[4] G. W. DePuy and G. D. Taylor: "Using Board Puzzles to Teach Operations Research," INFORMS Transactions on Education, Vol. 7, No. 2, 2007. (http://ite.pubs.informs.org/Vol7No3/Ritchie-DunhamMorriceAndersonDyer/)

[5] G. I. Bell, D. Hirschberg and P. Guerrero: "The Minimum Size Required of a Solitaire Army," INTEGERS Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, Vol. 7, G 7, 2007. (http://www.integers-ejcnt.org/vol7.html)

[6] M. Kiyomi and T. Matsui: "Integer Programming Based Algorithms for Peg Solitaire Problems," Computers and Games 2000, Revised Papers, Lecture Notes in Computer Science, Springer, Vol. 2063, pp. 229-240, 2001.

[7] 川連信：「『分裂物語』 についての研究」, 数学教室, No. 527, pp. 88-91, 1995 年 10 月号.

[8] 瀬山士郎：『数学者シャーロック・ホームズ』, 日本評論社, 1996.

[9] 芦ヶ原伸之：『パズルの宣教師』, 株式ニコリ, 2005.

[16] 図書館の本は大切に扱いましょう．