リアルオプションと資金調達

西原　理，芝田　隆志

近年，金融オプションの価格付け理論を応用したリアルオプションモデルによって，企業の最適投資戦略や投資プロジェクトの価値を分析する研究が数多くなされている．企業の投資問題を考えるとき，コーポレートファイナンスにおける重要な研究課題である最適な資金調達方法や資本構成といった問題も，同時に考慮されなければならない．本稿では，企業の最適な投資タイミングと負債発行を導出するリアルオプションモデルを説明する．特に，このモデルで企業の資金制約が投資戦略やプロジェクト価値に与える影響を明らかにする．

キーワード：デットファイナンス，最適資本構成，レバレッジ，投資ゲーム，preemption

1. はじめに

近年，企業の最適投資戦略の決定や投資プロジェクトの価値評価といった問題に対して，リアルオプションアプローチによる分析が数多く行われている．Net Present Value 法などの従来手法と比べると，将来の事業環境の不確実性が大きなプロジェクトの価値評価や投資戦略の決定に対して，リアルオプションアプローチは有用である．特に，市場の需要の先行きが不確実な中での投資タイミング決定問題をリアルオプションモデルで分析することが多い．

一方，コーポレートファイナンスにおいて最も重要な問題の一つは，最適な資金調達方法や資本構成の導出である．Modigliani, Miller[6]以降，負債による租税節約というプラスの効果と，負債によって企業が倒産する可能性が生じるというマイナスの効果のトレードオフを分析することによって，最適資本構成の理論が構築されていった．近年では，Leland[4]や Goldstein, Ju, Leland[1]などによって，金融工学で用いられる連続時間モデルへと拡張されている．

企業の投資タイミング決定問題を考える場合，最適な資金調達方法や最適資本構成といった問題も同時に考慮するのは自然であろう．実際，近年，Mauer, Sarkar[5]や Sundaresan, Wang[10][11]が，企業が負債発行と実物投資を同時に行うリアルオプションモデルを構築し，企業価値，投資タイミング，デットファイナンス，内生的な倒産タイミングの分析を行っている．本稿では，同様のモデルで，プロジェクトの投資コストの一部を負債によって資金調達しなければならないという資金制約がある起業家の投資問題を分析する．このような資金制約は，十分な自己資金がない多くの起業家に当てはまると考えられる．この分析によって以下のような資金制約の影響が明らかになる．

資金制約のある起業家は，資金制約がない場合に比べると，高いクーポンの負債を発行して遅いタイミングで投資を行う．また，レバレッジが高く倒産しやすくなり，クレジットスプレッドは大きくなる．さらに，2企業による投資争いを含むモデルに拡張することにより，以下の結果を示すことができる．互いに相手より先に投資を行ってリーダーのインセンティブ（first mover's advantage）を得ようとする（preemption 争いと呼ばれる）ために投資時点が早まり，起業家は，単一企業の問題の場合よりも資金制約による影響を受けやすくなる．また，資金制約が preemption 争いを緩和する役割を果たし，均衡における両者のプロジェクト価値を増加させる可能性が生じる．これは，単一企業の問題では起業家にとってマイナスの効果でしかない資金制約が，複数企業による投資争いを考慮した場合にはプラスの効果をもたらす可能性を示唆している．資金制約のわずかな違いが，2企業による投資争いの結果に大きく影響を及ぼす可能性についても言及する．

本稿では，2節で，資金制約のない起業家の投資問題に対する結果を紹介した後，3節で，資金制約のある起業家の投資問題を分析する．3節では，最初に単一企業の問題の結果を述べた上で，競争的な2企業の

にしはら　みち
大阪大学 金融・保険教育研究センター
〒560-8531 豊中市待兼山町 1-3
しばた　たかし
首都大学東京 大学院社会科学研究科
〒192-0397 八王子市南大沢 1-1

問題の結果についても述べる．

2．資金制約のない起業家

2.1 モデルの設定

まず，本稿を通じて用いるモデルの設定を説明する．新しいプロジェクトに投資を行おうとするリスク中立的な起業家を考える．起業家は，時刻 t における市場の需要 $X(t)$ を観察しながら，最適なタイミングで投資を行うことができるとする．企業は，投資コスト I を費やして事業を開始することにより，永続的な利益フロー $QX(t)$ を得ることができる．ここで，Q と I は正の定数とする．法人税率を $\tau\in(0,1)$ とし，簡単化のため，需要 $X(t)$ は以下の幾何ブラウン運動に従うと仮定する：

$$\mathrm{d}X(t)=\mu X(t)\mathrm{d}t+\sigma X(t)\mathrm{d}B(t),\quad X(0)=x(>0)$$

ここで，ボラティリティ σ は正の定数とし，$B(t)$ は1次元標準ブラウン運動を表す．通常通り，プロジェクト価値の収束性を保障するため，無リスク利率 r に対して，$\mu<r$ の関係が成り立つと仮定する．初期時点における需要 $X(0)=x$ は十分に小さく，企業が初期時点において即時投資を行う可能性がないとする．

2.2 起業家の投資戦略と企業価値

ベンチマークとして，負債発行を行わない起業家[1]を考える．この場合，最適な投資タイミングを決める起業家の問題は以下の通りである：

$$\begin{aligned}V_{ae}(x)&=\sup_{T\in\mathcal{T}}\mathbb{E}\left[\int_T^{+\infty}\mathrm{e}^{-rt}(1-\tau)QX(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-rT}I\right],\\&=\sup_{T\in\mathcal{T}}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rT}(\Pi(X(T))-I)]\end{aligned}\tag{1}$$

ここで，$\mathcal{T}$ は，ブラウン運動 $B(t)$ によって生成される通常の条件を満たすフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}$ における停止時刻全体の集合であり，$\Pi(X(T))$ は，

$$\Pi(X(T))=\frac{1-\tau}{r-\mu}QX(T)\tag{2}$$

である．

問題(1)は，最も基本的なリアルオプションモデルであり，閉じた形の最適解を得ることができる．実際，問題(1)の最適投資時刻 T_{ae}^i は，

$$T_{ae}^i=\inf\left\{t>0|X(t)\geq x_{ae}^i=\frac{\beta I\Pi(1)}{\beta-1}\right\}$$

となり，企業価値 $V_{ae}(x)$ は，

$$V_{ae}(x)=\left(\frac{x}{x_{ae}^i}\right)^{\beta}(\Pi(x_{ae}^i)-I)\tag{3}$$

となる．ただし，β は，

$$\beta=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}}(>1)$$

である．

次に，最適な資本構成を持つ起業家の投資戦略と企業価値を紹介する．以下の結果は，Sundaresan, Wang[10]によって示されている．問題を後ろから解く．まず，起業家が，需要 $X(s)$ のときにクーポン c の負債[2]を発行して投資を行ったと仮定するところから分析をはじめる．負債を発行した後，起業家は，市場の需要 $X(t)$ によっては企業を倒産させるインセンティブを持つ．起業家は倒産するまでクーポンを支払い続けなければならないことに注意する．したがって，起業家は，起業家の価値（「株式価値」とみなすこともできる）を最大化しようと，状態 $X(s)$ を初期値とする以下の最適停止問題を解いて倒産時刻 T^d を決める：

$$\begin{aligned}E(X(s),c)=\operatorname*{ess\,sup}_{\substack{T\in\mathcal{T}\\T\geq s}}\mathbb{E}\Big[&\int_s^T\mathrm{e}^{-r(t-s)}(1-\tau)\\&\times(QX(t)-c)\mathrm{d}t|\mathcal{F}_s\Big]\end{aligned}\tag{4}$$

問題(4)の最適倒産時刻 T^d は，

$$T^d=\inf\{t\geq s|X(t)\leq x^d(c)\}$$

となる．ただし，倒産トリガー $x^d(c)$ は，

$$x^d(c)=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{r-\mu}{r}\frac{c}{Q}.\tag{5}$$

で定義され，γ は

$$\gamma=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}-\sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}}(<0)$$

である．時刻 s における起業家の価値 $E(X(s),c)$，負債価値 $D(X(s),c)$，企業価値 $V(X(s),c)=E(X(s),c)+D(X(s),c)$ は，$X(s)\geq x^d(c)$ に対して，以下のように書き表される：

$$\begin{aligned}E(X(s),c)=&\Pi(X(s))-\frac{(1-\tau)c}{r}\\&-\left(\Pi(x^d(c))-\frac{(1-\tau)c}{r}\right)\left(\frac{X(s)}{x^d(c)}\right)^{\gamma}\end{aligned}$$

[1] 起業家が事業に必要となる投資資金を十分に保有しているか，あるいは，エクイティファイナンスによる資金調達が可能な場合である．

[2] 本稿では，Leland[4]，Goldstein, Ju, Leland[1]，Sundaresan, Wang[10]と同様に，満期無限の社債，すなわち，倒産するまで永続的にクーポンを支払い続けるという社債を考えている．満期無限の社債という仮定は，現実的ではないが，解析解を用いて定性的な結果を示すことができるため，リアルオプション研究では，おかれることの多い仮定である．

$$D(X(s),c)=\frac{c}{r}-\left(\frac{c}{r}-(1-\alpha)\Pi(x^d(c))\right)\left(\frac{X(s)}{x^d(c)}\right)^{\gamma} \tag{6}$$

$$V(X(s),c)=\Pi(X(s))+\frac{\tau c}{r}-\left(\alpha\Pi(x^d(c))+\frac{\tau c}{r}\right)\left(\frac{X(s)}{x^d(c)}\right)^{\gamma} \tag{7}$$

$X(s)<x^d(c)$ ならば，$E(X(s),c)=0$ で $V(X(s),c)=D(X(s),c)=(1-\alpha)\Pi(X(s))$ となることに注意する．(6)と(7)で $\alpha\,(\geq 0)$ は倒産コストを表す定数である．通常通り，倒産時には，起業家の価値は0になり，債権者が倒産価値 $(1-\alpha)\Pi(x^d(c))$（倒産企業の不動産や設備などを売却して得られる価値）をすべて得ることができるとしている．

本稿を通じて，債権市場は完全競争的であると仮定する．すなわち，起業家は，債権者から負債価値(6)と等しい金額を借り入れることができるとする．このとき，起業家が投資プロジェクトから得る利益は，企業価値(7)と一致する．したがって，企業家は，企業価値(7)を最大化しようと，以下の最適停止問題を解いて投資時刻 T^i とクーポン c を決める：

$$V_{de}(x)=\sup_{\substack{T\in\mathcal{T}\\ c:\,\mathcal{F}_T\text{可測}}}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rT}(V(X(T),c)-I)] \tag{8}$$

$X(s)>0$ に対して $\arg\max_{c\geq 0}V(X(s),c)$ が

$$c(X(s))=\frac{r}{r-\mu}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{QX(s)}{h}(>0), \tag{9}$$

となることに注意する．ただし，h は，

$$h=\left[1-\gamma\left(1-\alpha+\frac{\alpha}{\tau}\right)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}(>1).$$

で定義される定数である．(9)を(7)に代入して計算すると次式が得られる：

$$V(X(s),c(X(s)))=\psi^{-1}\Pi(X(s))$$

ただし，$\Pi(X(s))$ は，(2)によって定義される関数であり，ψ は，

$$\psi=\left[1+\frac{\tau}{(1-\tau)h}\right]^{-1}(<1)$$

で定義される正の定数である．結局，問題(8)を以下の問題に書き直すことができる：

$$V_{de}(x)=\sup_{T\in\mathcal{T}}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-rT}(\psi^{-1}\Pi(X(s))-I)]$$

したがって，問題(8)の最適投資時刻 T^i は，

$$T^i=\inf\{t>0|X(t)\geq x^i\}$$

となり，最適クーポン c^i は，(9)で定義された関数を用いて $c^i=c(x^i)(>0)$ と書き表すことができる．ただし，投資トリガー x^iは，

$$x^i=\psi x^i_{ae}(<x^i_{ae}) \tag{10}$$

であり，負債発行のない場合よりも投資タイミングは早まる．(5)と(9)より，倒産トリガーは $x^d(c(x^i))=x^i/h$ となる．初期時点における企業価値 $V_{de}(x)$ は

$$V_{de}(x)=\left(\frac{x}{x^i}\right)^{\beta}(\psi^{-1}\Pi(x^i)-I)=\psi^{-\beta}V_{ae}(x)(>V_{ae}(x)) \tag{11}$$

と計算され，負債発行のない場合よりも $\psi^{-\beta}$ 倍だけ企業価値は増加する．

投資時点 T^i におけるレバレッジ LV，クレジットスプレッド CS は，それぞれ，

$$LV=\frac{D(x^i,c(x^i))}{V(x^i,c(x^i))}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\psi(1-\xi)}{h(1-\tau)}$$

$$CS=\frac{c(x^i)}{D(x^i,c(x^i))}-r=r\frac{\xi}{1-\xi},$$

と計算できる．ここで，ξ は

$$\xi=\left(1-(1-\alpha)(1-\tau)\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)h^{\gamma}(<1)$$

で定義される正の定数である．レバレッジ LV とクレジットスプレッド CS は投資トリガー x^i に依存しない形に表されることに注意する．

3. 資金制約のある起業家

3.1 単一企業の場合

本節では，投資コストのうち少なくとも qI（ただし，$q\in(0,1]$ とする）については負債発行によって調達しなければならないという資金制約が課された起業家を考える．資金制約のパラメータ q が大きいほど，企業家が自己資金やエクイティファイナンスによって投資コストを捻出するのが難しいことを意味する．起業家の資金制約は，投資時点 T における需要 $X(T)$ とクーポン c の関係式

$$D(X(T),c)\geq qI. \tag{12}$$

として表現される．すなわち，本節では，資金制約(12)のある問題(8)を考察する[3]．資金制約のある企業の投資問題に対して以下の命題を示すことができる．上付き記号 * をつけることによって資金制約のある企業を表すことにする．

命題1 等式 $D(x_2,c(x_2))=qI$ を満たす $x_2>0$ が一意に存在する．さらに，$\max_{c\geq 0}D(x_1,c)=qI$ を満たす $x_1\in(0,x_2]$ が一意に存在する．資金制約のない起業家

の投資トリガー x^i ((10)を参照）と x_2 の大小関係に応じて，次の2つのケースに分かれる．

Case(1-a)：$x^i \geq x_2$

資金制約のある起業家の投資戦略と企業価値は，資金制約がない場合（2節を参照）と一致する．

Case(1-b)：$x^i < x_2$

資金制約のある起業家は，時刻

$$T^{i*} = \inf\{t > 0 | X(t) \geq x^*\}$$

にクーポン c^* の負債を発行して投資を行う．その後，時刻

$$T^{d*} = \inf\{t > T^{i*} | X(t) \leq x^d(c^*)\}$$

で倒産する．資金制約のある場合の投資トリガー x^*，クーポン c^*，レバレッジ LV^*，クレジットスプレッド CS^* は，不等式

$$x_1 \leq x^* \leq x_2, \quad c^* \geq c(x^*),$$

$$LV^* \geq LV, \quad CS^* \geq CS$$

を満たす．初期時点における企業価値 $V^*_{de}(x)$ は，不等式 $V^*_{de}(x) \leq V_{de}(x)$ を満たす．

命題1で，閾値 x_1 は，起業家が負債により投資資金を調達するのに最低限必要となる需要であり，閾値 x_2 は，起業家が資金制約の影響を受けるかどうかの分岐点となる需要である．もちろん，x_1，x_2 は，q に対して単調に増加することが分かる．$q=1$ に対して Case(1-b)が成り立つとき，q を徐々に小さくする（資金制約を緩めることを意味する）と，Case(1-a) と Case(1-b)の分岐点 $\hat{q} \in (0,1)$ があって，$q \leq \hat{q}$ では Case(1-a)となる．

Case(1-a)では，起業家は資金制約による損失を被らないが，Case(1-b)では，起業家は資金制約による損失を被ることになる．Case(1-b)では，起業家は，負債価値（借り入れ額）(6)を大きくしようとするために，クーポンとレバレッジを資金制約がない場合よりも高く設定する．これによって，資金制約が有効な場合には，企業が倒産する可能性やクレジットスプレッドも高くなり，社債の格付けは低くなる．

Case(1-b)では，企業価値 $V^*_{de}(x)$ は，資金制約の厳しさを表す q に対して単調に減少し，Case(1-a)では，資金制約のない場合の企業価値 $V_{de}(x)$ ((11)を参照）と一致する．企業価値 $V^*_{de}(x)$ は，負債発行を行わない場合の企業価値 $V_{ae}(x)$ ((3)を参照）よりも必ずしも大きいとは限らない．$V^*_{de}(x)$ と $V_{ae}(x)$ の大小関係は資金制約と税効果のトレードオフによって決まる．

Case(1-b)では，通常，投資トリガー x^* は x^i より大きくなり[4]，負債のクーポン c^* は $c^i = c(x^i)$ より大きくなる．これは，起業家が，需要がより高くなるまで投資を延期することによって，資金制約による損失を抑えようとするためであると考えられる．

3.2 競争的な2企業の場合

本節では，資金制約をもつ対称な2企業による完全情報下の投資ゲーム[5]を分析する．両企業が同時に市場に存在する場合，各企業は利益フロー $Q_2 X(t)$ を得るものとする．本稿では，資金制約がある2企業の投資ゲームの特徴を解析的に示すために，利益率 $Q_2 = 0$[6] という仮定と，命題1において Case(1-a)が成り立つという仮定をおく．

Grenadier[2]などと同様に，問題を後ろから考える．すなわち，どちらか一方の起業家（リーダーと呼ぶ）が，状態 $X(s)(\geq x_1)$ で先に投資を行ったと仮定するところから分析をはじめる．このとき，リーダーの企業価値 $L^*(X(s))$（時刻 s 時点での価値）は次のようになる：

[3] 本稿の設定では，資金制約を投資時点でのみ考慮しており，倒産時点において考慮していない．すなわち，倒産タイミングは，内部資金に関わらず常に最適に決められている．これは以下の理由による．通常，起業家は投資時点で多額の投資費用が必要となる．まだ事業を開始していない起業家が，そのような多額の投資費用のすべてを自己資金やエクイティファイナンスによって調達することは難しいため，投資時点での資金制約の影響は考慮すべきである．一方，倒産タイミングを決める段階では，起業家は既に事業を行っている．したがって，事業から得られた収益やその内部留保金などからクーポンを支払うことはそれほど難しくない．連続して支払わなければならないクーポン額は，投資時に一括で必要となる投資費用に比べると少ない．したがって，倒産時点では資金制約を考慮せずに，起業家が（クーポン支払いを続けるよりも倒産させるほうがよくなるような）最適なタイミングで企業を倒産させることができるとする．

[4] 理論的に証明できていないが，われわれが試したすべての数値例で $x^* > x^i$ が成り立った．

[5] 初期のリアルオプション研究では単一の企業の投資問題が分析されることが多かったが，複数企業による競争的な投資問題の分析が，近年のリアルオプション研究における一つの潮流となっている．複数企業の投資問題を取り扱った研究としては，Grenadier[2][3]，Nishihara, Fukushima[7]，Nishihara, Ohyama[8]などが挙げられる．

[6] これは，市場が1企業で飽和してしまう，あるいは，2企業で争うと利益率が0になるという強い仮定であり，今後の研究で弱められなければならない．

$$L^*(X(s))=V(X(s),c^*(X(s)))-I. \tag{13}$$

ここで，$c^*(X(s))$は，資金制約がある企業の最適なクーポンを意味し，$X(s)<x_2$ならば$c^*(X(s))>c(X(s))$であり，$X(s)\geq x_2$ならば$c^*(X(s))=c(X(s))$である．

また，もう一方の起業家（フォロアーと呼ぶ）の企業価値$F^*(X(s))$（時刻s時点での価値）は以下の式で書き表される：

$$F^*(X(s))=\left(\frac{X(s)}{x^d(c^*(X(s)))}\right)^\gamma V_{de}(x^d(c^*(X(s)))) \tag{14}$$

(14)は，リーダーの倒産後に投資を行うオプションの価値である．本節では，命題1においてCase (1-a)が成り立つことを仮定したため，フォロアーは，リーダーの倒産後に，資金制約のない場合と同じ戦略（投資トリガーx^i，クーポン$c(x^i)$，倒産トリガー$x^d(c(x^i))$，レバレッジLV，クレジットスプレッドCS）を実行することに注意する．

リーダの企業価値(13)とフォロアーの企業価値(14)を比較することによって，各起業家がリーダーのインセンティブを狙って互いに相手より先回りして投資を行おうとする際に生じる均衡（preemption均衡と呼ぶ）を求めることができる．大雑把に言えば，preemption均衡では，各起業家は，リーダーとフォロアーの価値が等しくなる時点，つまり$L^*(x_P^*)=F^*(x_P^*)$を満たすpreemptionトリガーx_P^*でクーポン$c^*(x_P^*)$の負債を発行して投資を行おうとする．$x_P\in(0,x^i]$を以下の方程式の一意解とする：

$$\psi^{-1}\Pi(x_P)-I=h^{\gamma-\beta}\left(\frac{x_P}{x^i}\right)^\beta(\psi^{-1}\Pi(x^i)-I)$$

このとき，Nishihara, Shibata[9]で示されているように，x_Pは資金制約がない対称な2企業の競争で生じるpreemptionトリガーとなる．このx_Pに対して以下の命題を示すことができる．

命題2　資金制約のない場合のpreemptionトリガーx_Pと命題1で定義された閾値x_2の大小関係に応じて，次の2つのケースに分かれる．

Case (2-a)　$x_2\leq x_P$

各起業家の投資戦略と企業価値は，資金制約がない場合（Nishihara, Shibata[9]のProposition 1を参照）と一致する．

Case (2-b)　$x_2>x_P$

一方の起業家が，他方より早いタイミングで，リーダーとして負債を発行して投資を行う．このとき，負債のクーポン，投資時点におけるレバレッジ，クレジットスプレッドは，資金制約がない場合よりも高くなる．もう一方の起業家は，リーダーの倒産後に，フォロアーとして資金制約のない起業家と同じ投資戦略（投資トリガーx^i，クーポン$c(x^i)$，倒産トリガー$x^d(c(x^i))$，レバレッジLV，クレジットスプレッドCS）を実行する．

Case (2-b)は，preemption争いによって投資タイミングが早まる影響で単一企業の問題では効かなかった資金制約が有効になるケースである．このケースでは，リーダーは，最適なレバレッジよりも高いレバレッジで投資を行わなければならず，クレジットスプレッドも高くなる．Case (2-b)は，さらに次の2つのケースCase (2-b-1)とCase (2-b-2)に分かれる．Case (2-b-1)は，$L^*(x_P^*)=F^*(x_P^*)$を満たすpreemptionトリガーx_P^*が$[x_1,x_2)$の中に存在する場合である（図1を参照[7]）．このケースでは，一方の起業家が，リーダーとしてpreemptionトリガーx_P^*で，クーポン$c^*(x_P^*)$の負債を発行して投資を行い，他方の起業家が，リーダーの倒産後，フォロアーとして単一企業の場合と同じ投資戦略を実行する．初期時点における両企業の企業価値は等しく，$(x/x_P^*)^\beta L^*(x_P)=(x/x_P^*)^\beta F^*(x_P)$と表される．

Case (2-b-2)は，すべての$x\in[x_1,x_2)$に対して$L^*(x)>F^*(x)$が成り立つケースである（図2を参照[8]）．このケースでは，一方の起業家が，リーダーとして投資トリガーx_1でクーポン$c^*(x_1)$の負債を発行して投資を行い，他方の企業が，リーダーの倒産後に，フォロアーとして単一企業の場合と同じ投資戦略を実行する[9]．$(x/x_1)^\beta L^*(x_1)>(x/x_1)^\beta F^*(x_1)$より，リーダ

[7] この数値例では，パラメータを$r=0.07$，$\mu=0.04$，$\sigma=0.2$，$I=2$，$Q=0.1$，$\tau=0.4$，$\alpha=0.2$，$q=1$，$x=X(0)=0.7$として計算した．このとき，$x_1=0.84$，$x_2=0.908$，$x_P^*=0.842$，$c^*(x_P^*)=0.19>c(x_P^*)=0.154$となる．また，リーダーのレバレッジとクレジットスプレッドは，それぞれ，$0.891>LV=0.803$，$0.025>CS=0.013$となる．

[8] この数値例では，図1のパラメータのうち，ボラティリティだけを$\sigma=0.1$に変更して計算を行った．このとき，$x_1=0.731$，$x_2=0.754$，$c^*(x_1)=0.155>c(x_1)=0.142$となり，リーダーのレバレッジとクレジットスプレッドは，それぞれ，$0.929>LV=0.885$，$0.008>CS=0.003$となる．

[9] ここでは，2企業が同じタイミングで投資を行おうとした場合には，確率1/2でどちらか一方の企業がリーダーに選ばれ，選ばれなかった企業はフォロアーとして最適応答をとると考える．

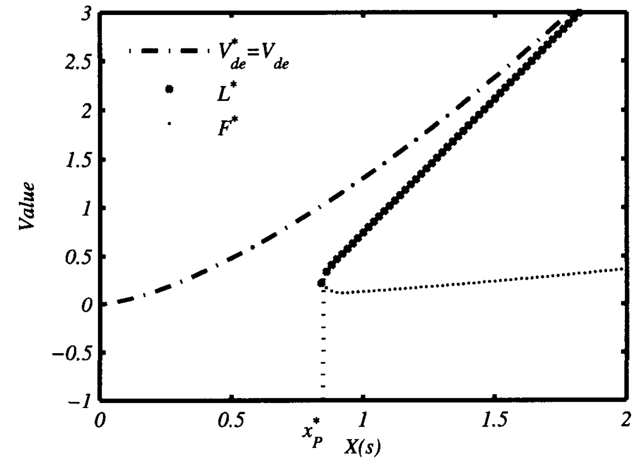

図1　Case(2-b-1)

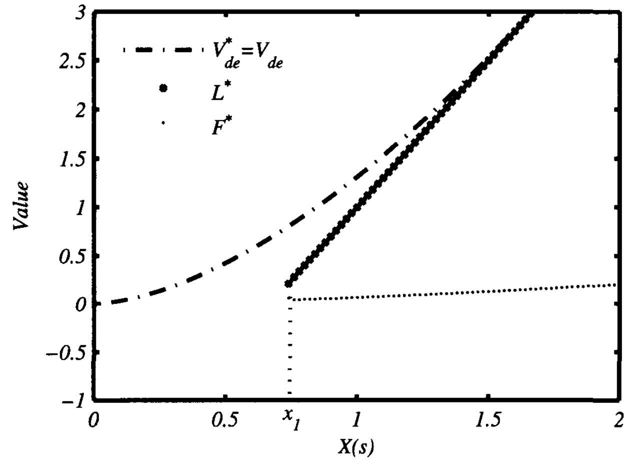

図2　Case(2-b-2)

ーの企業価値が，フォロアーの企業価値よりも高くなることに注意する．

Case(2-b)では，資金制約があるために $L^*(X(s))$(resp. $F^*(X(s))$) は，資金制約のない場合に比べて小さくなる (resp. 大きくなる)．これによって，リーダーの投資トリガー x_P^* あるいは x_1 は，資金制約がない場合の preemption トリガー x_P よりも大きくなる．したがって，均衡では，資金制約をもつ起業家の企業価値は，資金制約がない場合に比べて高くなる可能性が生じる．すなわち，単一企業の問題を考えた場合にはマイナスの影響しか及ぼさない資金制約が，起業家間の preemption 争いを緩和して企業価値を上昇させるというプラスの影響を及ぼす可能性を示唆している．例えば，図1の数値例では，資金制約があると均衡における企業価値は約2倍に上昇する．

これまで完全に対称な2企業の投資ゲームを分析してきたが，2企業の資金制約が微小な $\varepsilon(>0)$ だけ異なる場合も考察してみよう．起業家1と2で，それぞれ，資金制約のパラメータ $q-\varepsilon$ と q を持つ起業家を表すことにする．まず，Case(2-a)では，両企業ともに資金制約の影響を受けないために結果が変わらないことに注意する．

Case(2-b)では，起業家1は，リーダーとして投資を行って起業家2よりも高い利益を得ることができる．Case(2-b-1)では，$L^*(x_P^*)=F^*(x_P^*)$ より，起業家1と2の得る企業価値の差は，$\varepsilon\downarrow 0$ のとき0に近づく．これに対し，Case(2-b-2)では，起業家1と2の得る企業価値の差は，$\varepsilon\downarrow 0$ のとき $(x/x_1)^\beta(L^*(x_1)-F^*(x_1))(>0)$ に近づく．これは，起業家間の資金制約の微小な違いが結果に大きな影響を及ぼす可能性があることを意味している．実際，図2の数値例では，微小な資金制約の違いによって，リーダーの企業価値はフォロアーの企業価値の約1.5倍となる．

4. 終わりに

本稿では，企業が負債発行と実物投資を同時に行うリアルオプションモデルを紹介し，起業家に課された資金制約が投資戦略やプロジェクト価値に与える影響について説明してきた．しかし，資金調達を考慮したリアルオプションモデルの研究はまだ十分に行われていないのが現状である．今後は，資金調達方法に応じた調達コストの違いや，起業家と投資家の間の非対称情報や利益の配分などといった問題も，リアルオプションモデルの枠組みの中で分析する必要があるだろう．
最後に，本研究は科学研究費補助金若手研究(B) 20710116，19710126 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] R. Goldstein, N. Ju and H. Leland. An ebit-based model of dynamic capital structure. *Journal of Business*, 74 : 483-512, 2001.

[2] S. Grenadier. The strategic exercise of options: development cascades and overbuilding in real estate markets. *Journal of Finance*, 51 : 1653-1679, 1996.

[3] S. Grenadier. Option exercise games: an application to the equilibrium investment strategies of firms. *Review of Financial Studies*, 15 : 691-721, 2002.

[4] H. Leland. Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *Journal of Finance*, 49 : 1213-1252, 1994.

[5] D. Mauer and S. Sarkar. Real options, agency

conflicts, and optimal capital structure. *Journal of Banking and Finance*, 29: 1405-1428, 2005.

[6] F. Modigliani and M. Miller. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. *American Economic Review*, 48: 261-297, 1958.

[7] M. Nishihara and M. Fukushima. Evaluation of firm's loss due to incomplete information in real investment decision. *European Journal of Operational Research*, 188: 569-585, 2008.

[8] M. Nishihara and A. Ohyama. R & D competition in alternative technologies: A real options approach. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 51: 55-80, 2008.

[9] M. Nishihara and T. Shibata. Strategic investment with debt financing. Discussion Paper Series 2008-04, Center for the Study of Finance and Insurance, Osaka University, 2008.

[10] S. Sundaresan and N. Wang. Dynamic investment, capital structure, and debt overhang. Working Paper, Columbia University, 2007.

[11] S. Sundaresan and N. Wang. Investment under uncertainty and strategic debt service. *American Economic Review, Papers & Proceedings*, 97: 256-261, 2007.