不確実性下における調整費用を考慮した設備投資

辻村　元男

本稿では，事業の拡大のために，設備の拡張を計画している企業の問題を考察する．設備を導入するためには，設備の購入費用に加え調整費用がかかる．これらは埋没費用となり，投資に対する不可逆性が存在するとする．また，導入される設備によって作られる財の価格は不確実であるとする．このような設備投資に関する不確実性，不可逆性を考慮した企業の問題を，リアルオプション・アプローチによって分析する．形式的には，企業の問題は，設備を導入する最適な時刻を求める最適停止問題として定式化される．また，数値例を用い比較静学を行う．

キーワード：リアルオプション，設備投資，最適停止

1. はじめに

企業価値最大化を目指す企業にとって，財務戦略上の重要な意思決定として，設備投資，資本構成，配当政策がある．これらのうち，本稿では設備投資について考察する．企業の設備投資の問題については，個別企業について重要であるばかりでなく，投資に対する需要の変動がある国の経済全体の変動に対しても大きな影響を与え，景気変動や経済成長にも大きな影響を与えることからも，経済学においても非常に重要な問題となっている．このように重要な企業の設備投資について，Arrow[5]は投資の不可逆性を考慮し，Hartman[11]は不確実性を考慮し，投資問題を分析した．以降，不可逆性と不確実性の影響を考慮した設備投資の分析が盛んになった．分析に際しては，金融資産に対するオプションの価値評価を実物資産に応用したリアルオプション・アプローチが採られる．この方法に関する代表的なテキストとしては，Dixit and Pindyck[9]がある．和書としては，山口[3]，今井[1]，木島・中岡・芝田[2]などがある．本稿では，リアルオプション・アプローチを紹介するため，簡単な企業の設備投資問題について考察する．

企業は，事業の拡大のために，設備の拡張を計画している．投資の規模は既に決定されているとする．投資対象である設備は，売却することができず，設備投資に関して不可逆性が存在するとする．将来の事業環境は不確実であり，その不確実性は，導入された設備を用いて生産される財の価格にすべて反映されるとする．

投資の意思決定については，導入された設備が生み出すキャッシュフローの割引現在価値と投資費用を比べる正味現在価値法（NPV 法）がよく知られている．このNPV 法に基づく投資の意思決定は，投資を今すぐ実施するか否かという意思決定である．しかし，現実には，事業環境を見極めるために，投資実施を遅らせるという選択肢も存在する．つまり投資実施時期に関して，柔軟性が存在するのである．したがって，企業の問題は，企業価値を最大とするために，いつ設備投資を実施すればよいかという問題となる．形式的には，この問題は確率制御問題の一種である最適停止問題として定式化される．

本稿の構成は以下である．次節で，企業の問題を定式化し，3 節で，問題を解き最適な投資政策を求める．4 節で，求められた最適な投資政策について比較静学を行う．最後に，5 節で本稿をまとめる．

2. 企業の問題

リスク中立な企業が，資本ストック K_t と労働 L_t を生産要素とし，ある財を生産し完全競争市場で販売しているとする．財の価格 P_t は外生的に与えられ，確率微分方程式

$$\mathrm{d}P_t=\mu P_t\mathrm{d}t+\sigma P_t\mathrm{d}W_t,\quad P_0=p>0 \tag{2.1}$$

に従っているとする．ただし，$\mu>0$，$\sigma>0$ は定数，W_t は標準ブラウン運動とする．企業の生産関数

つじむら　もとお
龍谷大学 経済学部
〒612-8577 京都市伏見区深草塚本町 67

$F(L_t, K_t)$ は，

$$F(L_t, K_t)=L_t^{\gamma}K_t^{1-\gamma} \tag{2.2}$$

と，Cobb-Douglas 型生産関数を仮定する．ただし，$0<\gamma<1$ である．労働は費用がかからず瞬時に調整可能であるとする．また賃金は $w>0$ とする．したがって，企業の利潤 $\tilde{\pi}$ は，

$$\tilde{\pi}(P_t, L_t, K_t)=P_tF(L_t, K_t)-wL_t \tag{2.3}$$

と与えられる．Abel and Eberly[4] と同様に，本稿では，企業の資本ストックの分析に注目するために，利潤関数 $\tilde{\pi}$ を労働に関して最適化をした結果得られる利潤 $\pi(K_t, P_t)$ を分析する．労働の最適な投入量は，$\partial\tilde{\pi}/\partial L_t=0$ より，$L_t=\gamma^{-1/(\gamma-1)}P_t^{1/(\gamma-1)}K_tw^{1/(\gamma-1)}$ と求まる．これを(2.3)に代入して得られる利潤 π は，

$$\pi(P_t, K_t)=hP_t^{\alpha}K_t \tag{2.4}$$

となる．ただし，$\alpha=1/(1-\gamma)>1$，$h=\alpha^{-\alpha}(\alpha-1)^{\alpha-1}w^{1-\alpha}>0$ である．

資本ストックは，時間の経過とともに $\delta\geq 0$ で減耗し，その振る舞いは，

$$\mathrm{d}K_t=-\delta K_t\mathrm{d}t, \quad K_0=k>0 \tag{2.5}$$

と与えられる．設備投資の規模は，$\zeta>0$ と与えられるとする．企業が設備投資をする時刻 τ での資本ストックは，

$$K_\tau=K_{\tau-}+\zeta \tag{2.6}$$

となる．労働とは異なり，資本ストックは瞬時に調整できないとする．資本ストックを増加させる設備投資には，設備の購入費用以外にも，生産組織の再編などの調整費用がかかると考えられる．投資規模が大きくなるほど，この調整費用も大きくなると考えられることから，費用関数を $C(\zeta)$ とすると，任意の $\zeta>0$ に対して，$C(0)=0$，$C'(0)=0$，$C'(\zeta)>0$，$C''(\zeta)>0$ となる．本稿では，これらの条件を満たす例として，費用関数を

$$C(\zeta)=c_1\zeta+c_2(\zeta)^2 \tag{2.7}$$

と与える．ただし，$c_1>0$ は設備の価格係数を，$c_2>0$ は調整費用係数を表す．以上より，利潤フローの期待割引現在価値として計算される企業価値 J は，

$$J(p, k\,;\,\tau)=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\pi(P_t, K_t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-r\tau}C(\zeta)\right] \tag{2.8}$$

と表される．ただし，$r>0$ は割引率を表す．したがって，企業の問題は，企業価値 J を最大とするために，設備投資を実施する時刻 τ を決める問題となり，

$$V(p, k)=\sup_\tau J(p, k\,;\,\tau)=J(p, k\,;\,\tau^*) \tag{2.9}$$

と与えられる．ただし，V は企業の問題の価値関数を表し，τ^* は最適な投資時刻を表す．

ここで，問題を解くために，

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\pi(P_t, K_t)\mathrm{d}t\right]=\frac{hp^\alpha k}{\rho}<\infty \tag{AS.1}$$

を仮定する．ただし，$\rho=r+\delta-[\mu\alpha+(1/2)\sigma^2\alpha(\alpha-1)]>0$ である．

3. 最適な投資政策

本節では，企業の問題(2.9)を解き，最適な投資政策としての最適な投資時刻を求める．

企業の問題(2.9)は最適停止問題として定式化されていることがわかる．最適停止問題は，変分不等式を用いて解けることが知られている．変分不等式については，Bensoussan and Lions[6]や Øksendal[13]を参照されたい．このために，まず，企業価値 J を

$$\begin{aligned}
J&(p, k\,;\,\tau)\\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\pi(P_t, K_t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-r\tau}C(\zeta)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-rt}\pi(P_t, K_t)\mathrm{d}t\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{e}^{-r\tau}\left(\int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-r(t-\tau)}\pi(P_t, K_t)\mathrm{d}t-C(\zeta)\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-rt}\pi(P_t, K_t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-r\tau}G(P_\tau, K_\tau)\right]
\end{aligned} \tag{3.1}$$

と書き直す．ただし，

$$\begin{aligned}
G&(P_t, K_t)\\
&=\mathbb{E}\left[\int_t^\infty \mathrm{e}^{-r(s-t)}\pi(P_s, K_s)\mathrm{d}s-C(\zeta)\right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

である．つまり，G は設備投資が実施された以降の企業価値を表す．企業の問題(2.9)に対して，Bellman の最適性原理と(3.1)より，任意の p，k と $s\leq\tau$ に対して，

$$\begin{aligned}
V&(p, k)\\
&=\sup_\tau \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \mathrm{e}^{-rt}\pi(P_t, K_t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-r\tau}G(P_\tau, K_\tau)\right]\\
&\geq\mathbb{E}\left[\int_0^s \mathrm{e}^{-rt}\pi(P_t, K_t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-rs}V(P_s, K_s)\right]\\
&=V(p, k)+\mathbb{E}\left[\int_0^s \mathrm{e}^{-rt}\pi(P_t, K_t)\mathrm{d}t\right.\\
&\qquad+\int_0^s \mathrm{e}^{-rt}\Big(-rV(P_t, K_t)\mathrm{d}t+V_p(P_t, K_t)\mathrm{d}P_t\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}V_{pp}(P_t, K_t)(\mathrm{d}P_t)^2+V_k(P_t, K_t)\mathrm{d}K_t\Big)\right]\\
&=V(p, k)+\mathbb{E}\left[\int_0^s \mathrm{e}^{-rt}\Big(\pi(P_t, K_t)-rV(P_t, K_t)\right.\\
&\qquad+\mu P_tV_p(P_t, K_t)+\frac{1}{2}\sigma^2P_t^2V_{pp}(P_t, K_t)\\
&\qquad\left.-\delta K_tV_k(P_t, K_t)\Big)\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

$$= V(p,k) + \mathbb{E}\left[\int_0^s \mathrm{e}^{-rt}(\mathcal{L}V(P_t,K_t)+\pi(P_t,K_t))\mathrm{d}t\right] \tag{3.3}$$

が成り立つ．ただし，$\mathcal{L}$は偏微分作用素であり，

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sigma^2 p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\mu p\frac{\partial}{\partial p}-\delta k\frac{\partial}{\partial k}-r \tag{3.4}$$

と与えられる．

企業の問題(2.9)に対する変分不等式は，

$$\mathcal{L}V(p,k)+\pi(p,k)\leq 0, \tag{3.5}$$

$$V(p,k)\geq G(p,k), \tag{3.6}$$

$$[\mathcal{L}V(p,k)+\pi(p,k)][G(p,k)-V(p,k)]=0 \tag{3.7}$$

となる．(3.5)は，(3.3)より明らか．(3.6)は，必ずしも今すぐ設備投資を実施することが最適ではないことから明らか．(3.7)は，相補性条件であり，(3.5)か(3.6)のどちらか一方が等号で成り立ち，もう一方が不等号で成り立つことを示す．したがって，企業が設備投資を実施する時刻τは，

$$\tau=\inf\{t>0\ ;\ V(P_t,K_t)=G(P_t,K_t) \tag{3.8}$$

と与えられる．

問題の設定より，企業が投資実施の判断基準にしているのは，財の価格水準である．したがって，企業は財の価格がある水準以上になると設備投資を実施すると推測される．企業が設備投資を実施する価格水準（閾値）をp^*とする．したがって，(3.8)で与えられた設備投資の実施時刻τは，

$$\tau=\inf\{t>0\ ;\ P_t\geq p^*\}. \tag{3.9}$$

となる．変分不等式(3.5)-(3.7)より，設備投資が実施されない財の価格範囲（続行領域）$p<p^*$において，

$$\mathcal{L}V(p,k)+\pi(q,x)=0 \tag{3.10}$$

を得る．(3.10)の解は，

$$V(p,k)=Ap^{\beta_1}+Bp^{\beta_2}+\frac{hp^{\alpha}k}{\rho} \tag{3.11}$$

となる．ただし，A，Bは決定すべき定数を表す．$\beta_1>1$，$\beta_2<0$は，それぞれ特性方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+\mu\beta-r=0 \tag{3.12}$$

の解であり，

$$\beta_1=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}},\quad \beta_2=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}-\sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{\sigma^2}} \tag{3.13}$$

と求まる．価格がゼロ($p=0$)のとき，企業価値はゼロ：

$$V(0,k)=0 \tag{3.14}$$

となる．財の価格がゼロに近づくとp^{β_2}は無限大に発散するため，$B=0$とする．したがって，Vは，

$$V(p,k)=Ap^{\beta_1}+\frac{hp^{\alpha}k}{\rho} \tag{3.15}$$

となる．(3.15)右辺第1項は，設備投資の実施時期に関する柔軟性に対する価値を表し，リアルオプション価値と呼ばれる．右辺第2項は，(AS.1)より，利潤の期待割引現在価値を表す．

未知定数Aとp^*は，価格水準が閾値に達したときに，設備投資を実施しない場合の価値と設備投資を実施する場合の価値が等しくなるvalue-matching条件：

$$V(p^*,k)=G(p^*,k) \tag{3.16}$$

と，これらの二つの価値が，なめらかにつながっているsmooth-pasting条件：

$$V_p(p^*,k)=G_p(p^*,k) \tag{3.17}$$

によって導かれる．ただし，(3.2)より，$G(p,k)$は，

$$G(p,k)=\frac{hp^{\alpha}(k+\zeta)}{\rho}-C(\zeta) \tag{3.18}$$

である．smooth-pasting条件の詳細については，Brekke and Øksendal[7]，Dixit[8] Section 4.1などを参照されたい．

条件(3.16)と(3.17)より，閾値p^*と未知定数Aは，それぞれ，

$$p^*=\left[\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha}\right)\left(\frac{\rho C^i(\zeta)}{h\zeta}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{3.19}$$

$$A=\frac{\alpha h\zeta}{\beta_1\rho}\left[\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\alpha}\right)\left(\frac{\rho C^i(\zeta)}{h\zeta}\right)\right]^{\frac{\alpha-\beta_1}{\alpha}} \tag{3.20}$$

と求まる．(3.9)と(3.19)によって，最適な設備の投資時刻が求まる．

4．数値例

本節では，β_1，未知定数A，閾値p^*，閾値でのリアルオプション価値$A(p^*)^{\beta_1}$について，パラメータの値を変化させることで比較静学を行う．比較静学の対象はすべて明示的に所与のパラメータだけで与えられており，解析的に比較静学をすることも可能である．しかし，一部については，非常に煩雑な式となるため，本稿ではすべてについて数値例を用いる．比較静学に使う基準となるパラメータの値は以下である．$r=0.05$，$\mu=0.02$，$\sigma=0.1$，$\gamma=0.3$，$w=1$，$\zeta=5$，$\delta=0.1$，$c_1=500$，$c_2=0.01$，$p=1.2$．分析の結果を表1に示した．また，価値関数Vを図1に示した．

得られた結果は，リアルオプションに関する分析で標準的なものである．割引率rが増加すると，閾値p^*は減少する．一方，価格の期待成長率μ，ボラテ

表1　比較静学の結果

	β_1	A	p^*	$A(p^*)^{\beta_1}$
基準	2	8.152	2.145	37.5
r	+	−	−	−
μ	−	+	+	+
σ	−	+	+	+
δ	uc	−	+	uc
γ	uc	♯	+	+
c_1	uc	−	+	+
c_2	uc	−	+	+

uc：変化なし.
♯：単調増加（減少）ではない.

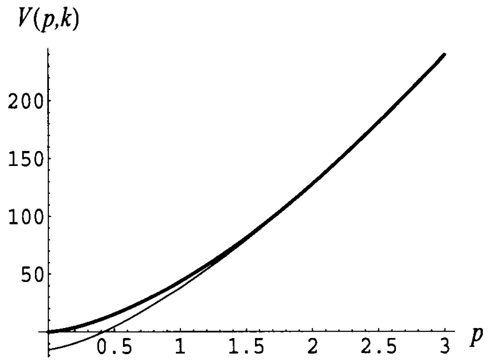

図1　価値関数
太線が価値関数 V を表し，細線が G を表す.

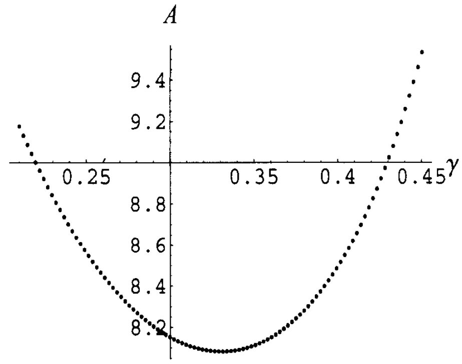

図2　γ の変化に対する A の変化

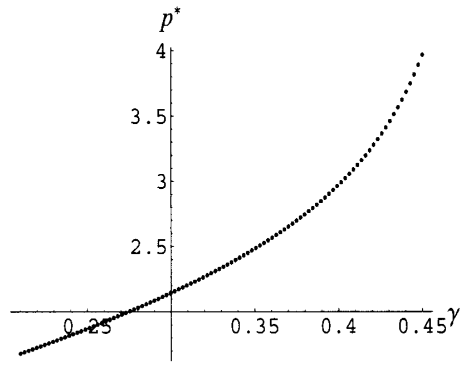

図3　γ の変化に対する p^* の変化

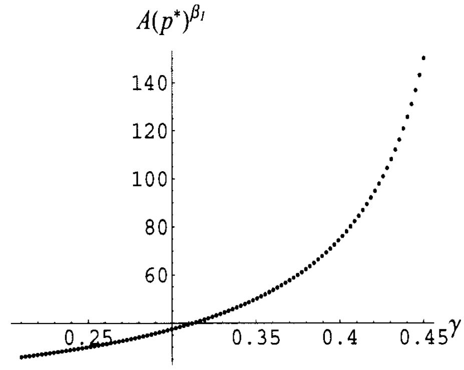

図4　γ の変化に対する $A(p^*)^{\beta_1}$ の変化

ィリティー σ，資本減耗率 δ，設備の価格係数 c_1，調整費用係数 c_2 が増加すると，p^* も増加する．特に重要な不確実性の大きさを表す σ に関する結果から，事業の不確実性が大きいときは，事業環境の変化を見極め投資を遅らせようとするインセンティブが働き，リアルオプション価値も増加している．

γ と δ に関する閾値でのリアルオプション価値 $A(p^*)^{\beta_1}$ については，A と p^* の関係から，以下のようになっている．γ に関しては，A は γ に関して下に凸（図2）となっているが，p^* は γ に関して増加関数（図3）となっている．その結果，p^* の影響の方が大きく，$A(p^*)^{\beta_1}$ は，γ に関して増加関数（図4）となっている．一方，δ に関しては，A への影響と p^* への影響が相殺し合い，変化なしとなっている．

5．おわりに

本稿では，企業の設備投資の問題として，事業を拡張するために，設備に一度だけ投資する問題を考察した．このような問題は，最適停止問題として定式化され分析される．実際の企業の設備投資の問題としては，設備への投資が一度限りということはなく，事業環境によっては，何度もなされる．また，導入された設備の売却も可能であり，不可逆性も部分的なものとなる．現実をより反映させるためには，これらのことを考慮した分析が必要となる．一つの方法として，Hartman and Hendrickson[12]，Guo and Pham[10]は，確率特異制御問題として，企業の設備の拡張・縮小の問題を定式化し分析している．今後は，これらの研究をさらに発展させ，企業の意思決定に有益な示唆を与えるモデルの開発が期待される．

参考文献

[1] 今井潤一 2004.『リアル・オプション. 投資プロジェクト評価の工学的アプローチ』中央経済社.

[2] 木島正明・中岡英隆・芝田隆志 2008.『リアルオプションと投資戦略』朝倉書店.

[3] 山口浩 2002.『リアルオプションと企業経営』エコノミスト社.

[4] Abel, A. B. and Eberly, J. C. 1997. An exact solution for the investment and value of a firm facing uncertainty, adjustment costs, and irreversibility, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **21**, 831-852.

[5] Arrow, K. J. 1968. *Optimal Capital Policy with Irreversible Investment*, in Wolf, J. N. (ed.), *Value, Capital and Growth : Papers in Honour of Sir John Hicks*, Edinburgh University Press.

[6] Bensoussan, A. and Lions, J. L. 1982. *Applications of variational inequalities in stochastic control*, NORTH-HOLLAND, Amsterdam.

[7] Brekke, K. A. and Øksendal, B. 1991. The High Contact Principle as a Sufficiency Condition for Optimal Stopping, in : Lund, D. and Øksendal, B. (eds.), *Stochastic Models and Option Values*, 187-208, North-Holland, Amsterdam.

[8] Dixit, A. 1993. *The Art of Smooth Pasting*, Harwood Academic Publishers.

[9] Dixit, A. and Pindyck, R. S. 1994. *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, New Jersey.

[10] Guo, X. and Pham, H. 2005. Optimal partially reversible investment with entry decision and general production function, *Stochastic Processes and Their Applications*, **115**, 705-736.

[11] Hartman, R. 1972. The effects of price and cost uncertainty on investment, *Journal of Economic Theory*, **5**, 258-266.

[12] Hartman, R. and Hendrickson, M. 2002. Optimal partially reversible investment, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **26**, 483-508.

[13] Øksendal, B. 1998. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*, 5th ed., Springer (谷口説男訳『確率微分方程式 入門から応用まで』Springer, 1999).