

順序付け尺度のゲーム論的解釈と数値計算による検証

流王 智子

(筑波大学第三学群社会工学類経営工学専攻 現所属・同大学院システム情報工学研究科社会システム工学専攻)

指導教員 山本芳嗣 教授

1. はじめに

本研究では、競技やコンテストなどの順序付けの方法を研究する。順序付けられる対象は、その競技の競技者であったり、最優秀論文賞にノミネートされた論文であったりする。審査員は複数人おり、しかも個々の審査員が評価できる対象は全対象の一部であるという状況を想定し、そのような部分的な審査結果を総合した何らかの尺度を対象全体に与え、それによって対象の順序付けを行うことを考えている。

本研究で考えている問題に対してすでに幾つかの尺度が提案されているが、本研究の目的はそれに加えて新しく尺度を提案することである。そして、その尺度の妥当性を3つの手段で保証することを試みる。第1は公理化である。これは、提案した尺度が尺度の満すべき性質を満たしていることを示し、その性質を持つものはこの尺度以外にないことを示す。第2はゲームの解としての特徴付けである。与えられた順序から協力ゲームを構成し、その解の1つであるシャープレー値として提案した尺度を与える。第3は数値計算による比較である。可能なあらゆる順序を作り出して、各尺度による順序付けの結果を比較する。さらにその結果から尺度の特性も明らかにしたい。

2. 問題の記述と仮定

対象の番号の集合を $N=\{1, 2, \dots, n\}$ とする。ある審査員 r が、例えば対象 i, j, k を審査し、それに対して、 $i > j > k$ と順序付けしている場合 $i \rightarrow j, j \rightarrow k, i \rightarrow k$ なる有向枝を作り、この枝集合を D_r と表す。同一の対象には優劣がつかないことから、自己ループはない。こうして、各審査員ごとに N をノード集合とする有向グラフ (N, D_r) ができる。この有向グラフを全審査員について重ね合わせたグラフを (N, D) と書く。また、どの対象対に関してもその両者を審査している審査員は高々1人であると仮定する。ノード集合 N は固定されているため、以降では有向グラフ

(N, D) を D のみで表す。また N 上の有向グラフすべての集合を \mathcal{D} と書く。以上のように定義すると、本研究の問題である尺度の構成は、各 $D \in \mathcal{D}$ に対して、 N の要素を添え字に持つ実ベクトルを与える関数を作ることになる。

3. 尺度

3.1 尺度の定義

まず記号の定義をする。

- ▷ $S_D(i) = \{j \in N | (i, j) \in D\}$: D での i の敗者その個数を $s_D(i)$ で表す。同様に、
- ▷ $P_D(i) = \{j \in N | (j, i) \in D\}$: D での i の勝者その個数を $p_D(i)$ で表す。

文献[1]ではノード i の score plus measure $\sigma^+ : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^N$ は以下のように定義されている。

$$\sigma_i^+(D) := s_D(i) (\forall i \in N, \forall D \in \mathcal{D}).$$

また、ノード i の β plus measure $\beta^+ : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^N$ は以下のように定義されている。

$$\beta_i^+(D) := \sum_{j \in S_D(i)} \frac{1}{P_D(j)} (\forall i \in N, \forall D \in \mathcal{D}).$$

3.2 公理化

有向グラフ D の下での $i \in N$ の評価を与える関数を f_i とし、ベクトル値関数 (f_1, \dots, f_n) を f で表す。この関数 $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^N$ に対して以下の公理を考える。

公理1 (規準化)

$$\sum_{i \in N} f_i(D) = \#\{j \in N | P_D(j) \neq \emptyset\} (\forall D \in \mathcal{D}).$$

公理2 (ダミーノード特性)

$$S_D(i) = \emptyset \Rightarrow f_i(D) = 0 (\forall D \in \mathcal{D}, \forall i \in N).$$

公理3 (単調性)

$$S_D(i) \supseteq S_D(j) \Rightarrow f_i(D) \geq f_j(D)$$

$$(\forall D \in \mathcal{D}, \forall i, j \in N).$$

D の分割 $\varsigma = \{D_1, \dots, D_m\}$ の独立性を以下のように定義する。

定義4 D の分割 $\varsigma = \{D_1, \dots, D_m\}$ が独立であるとは、 $\#\{k | P_{D_k}(i) \neq \emptyset\} \leq 1 (\forall i \in N)$ が成り立つことである。

公理5 (独立分割における加法性)

$$f_i(D) = \sum_{D_k \in \varsigma} f_i(D_k)$$

$(\forall i \in N, \forall \text{ 独立な分割 } \varsigma = \{D_1, \dots, D_m\}).$

定理6([1]) 関数 $f: \mathcal{D} \rightarrow R^N$ が N 上の β plus measure に等しいことと、関数 f が上記の公理1, 2, 3, 5 を満たすことは同値である。

3.3 ゲームの解としての特徴づけ

文献[1]では有向グラフ D を用いて審査対象の集合 N の上にゲーム (N, v) を定義し、そのシャープレー値が尺度を与えることを示して、尺度の妥当性を示している。

任意の $D \in \mathcal{D}$ と $E \subset N$ に対して、

$$\triangleright S_D(E) = \bigcup_{i \in E} S_D(i)$$

その要素数を $s_D(E)$ とする。

定理7([1]) 各 $E \subset N$ について

$$v_D(E) = s_D(E)$$

とすると、特性関数ゲーム (N, v_D) のシャープレー値 $\varphi^s(v_D)$ は β plus measure $\beta^+(D)$ に等しい。

4. 新しい尺度とゲームの解

既存研究の尺度に基づいて以下の尺度を提案する。ノード i の γ plus measure $\gamma^+: \mathcal{D} \rightarrow R^N$ を

$$\gamma_i^+(D) := \sum_{j \in S_D(i)} \frac{s_D(j)+1}{p_D(j)} (\forall i \in N, \forall D \in \mathcal{D}).$$

ノード i の δ plus measure $\delta^+: \mathcal{D} \rightarrow R^N$

$$\delta_i^+(D) := \sum_{j \in S_D(i) \cup \{i\}} \frac{1}{p_D(j)+1} (\forall i \in N, \forall D \in \mathcal{D}).$$

と定義した。既存研究と上記2つの尺度はノード i が勝っているノードの情報をノード i の評価としている。そこで、その逆にノード i が負けているノードの情報を評価とする尺度、またノード i が勝っているノードの情報と負けているノードの情報両方をあわせた尺度も考えた。

また、これらの妥当性を保証するために、3.2, 3.3節にならい、公理化とゲームの解としての特徴付けを行った。さらに、 γ plus measure は 3.3 の手法ではゲームの解として示すことができなかったので、以下

に示すように、新しくゲームを定義しなおした。

各ノードに初期値を導入し、その値の作るベクトルを $\pi \in R^N$ とする。この π と有向グラフ D に対するゲーム $v_D(E)$ の与え方によって、シャープレー値と尺度を関係付けることができた。

定理8

$\pi \in R^N$ が与えられたもとでゲーム $(N, v_D(E))$ の特性関数 v_D を

$$v_D(E) = \sum_{j \in S_D(E)} \pi_j$$

と定義すると、このゲームのプレイヤー i のシャープレー値 $\varphi_i^s(v_D)$ は $\sum_{j \in S_D(i)} \pi_j p_D(j)$ となる。

これにより、提案したすべての尺度をゲームの解として特徴付けることができた。

5. まとめ

本研究では既存研究をもとに新しい尺度をいくつか定義し、各尺度の公理化を試みた。さらに尺度の妥当性を保証するものとして、ゲームの解としての特徴付けがある。既存の手法以外に、各プレイヤーの初期値 π を導入することによって新しくゲームを再定義した。この新しいゲームの考え方によって、提案したすべての尺度をゲームの解として特徴付けることができ、提案した尺度の妥当性を保証することができた。

また数値計算の結果サイクルの個数が尺度の信頼性に影響を与えることがわかった。また、不完全情報の場合、審査対象の比較回数が、一部の尺度に影響を与えることがわかった。このことから、信頼性の高い評価を得るには、使用する尺度の選択にもまして、審査対象に対する審査員の割り当て方が重要であるといえる。以上を踏まえて、尺度の良さを生かせるような審査員割り当てを設計しなければならない。

参考文献

- [1] René van den Brink and Robert P. Gilles: "Measuring domination in directed networks," *Social Networks*, Vol. 15, pp. 1-53, 2000.