Discrete Optimization Approach to Index Reduction for Differential-Algebraic Equations

高松　瑞代
（東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻　現所属・同大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻）
指導教員　室田一雄 教授，岩田　覚 准教授

1. はじめに

微分代数方程式（DAE）とは微分演算子を含む方程式系であり，電気回路，機械力学系，化学プラントなどの動的システムを記述する際に現れる．DAEの常微分方程式からの遠さを表す指標としてさまざまな指数が定義されており，指数が大きくなるほど数値計算は困難になる[1]．本研究では，線形時不変DAEに対して二つの指数減少法を提案する．

第一の手法は，各式が微分変数を高々1個持つDAEの指数を1減少させる．この条件を満たすDAEには，半陽的DAEや多くの線形時不変回路の回路方程式（KCL, KVL，素子特性の式から定まる方程式）が含まれる．既存の指数減少法は新しい変数を導入するため，得られるDAEのサイズが大きくなるという欠点がある．それに対して，提案手法は新しい変数を導入しない．

第二の手法は電気回路に現れるDAEを対象とする．回路シミュレーションでは，修正節点解析（MNA）から導出されるDAEを解くのが一般的である．MNAから導出されるDAEの指数は回路の構造により決定され，指数を減少させる工夫の余地はない．電気回路の伝統的な解析法には，1930年代にKronが提案し，1960年代に甘利とBraninが発展・拡張させた混合解析がある．混合解析はMNAより自由度が高く，自由変数の個数が最小となる基本方程式（最小基本方程式）の理論が有名である．本研究では，混合解析において指数を最小化する組合せ的アルゴリズムを提案する．多くの電気回路において，最小指数の混合解析を用いるとMNAよりも指数の小さいDAEを得ることができる．

物理システムを記述する数学的道具として，混合多項式行列の概念が室田によって提唱されている[3]．混合多項式行列は，正確な数値と代数的独立なパラメータを係数に含む多項式行列である．物理量を表す誤差を含む数値と，誤差を含まない正確な数値を区別するのは数学モデルとして自然な議論である．本研究ではさらに，回路方程式をラプラス変換して得られる方程式系の係数行列が混合多項式行列であるという仮定の下で，混合解析における指数最小化アルゴリズムの高速化を行う．高速化には，付値独立割当と全点対間の最短路が利用されている．最後に，同様の手法を用いることで，正則な混合多項式行列の全余因子の次数を同時に求めるアルゴリズムを提案する．

2. 線形時不変DAE

多項式 $a(s)$ の次数を $\deg a(s)$ と表す．行集合 K，列集合 L で定まる多項式行列 $A(s)$ の小行列を $A[K, L]$ と書く．線形時不変DAEは $n\times n$ の定数行列 P, Q を用いて次のように書ける：

$$P\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)+Q\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{h}(t).$$

両辺にラプラス変換を適用すると，$A(s):=sP+Q$ と $\hat{\boldsymbol{f}}(s)=\hat{\boldsymbol{h}}(s)+P\boldsymbol{x}(0)$ を用いて $A(s)\hat{\boldsymbol{x}}(s)=\hat{\boldsymbol{f}}(s)$ と表せる．冪零指数は以下のように定義される：

$$\max\{\deg\det A[K, L] \mid |K|=|L|=n-1\} - \deg\det A+1.$$

3. 代入法による冪零指数減少法

正則な多項式行列 $A(s)=sP+Q$ に対し，正則な小行列 $A[X, Y]$ を B とおく．ここで，A に次の行変形を施した行列を $\tilde{A}$ とし，同様の行変形を $\hat{\boldsymbol{f}}$ に施したベクトルを $\tilde{\boldsymbol{f}}$ とする：

$$A=\begin{pmatrix} B & N \\ H & M \end{pmatrix} \to \tilde{A}=\begin{pmatrix} B & N \\ O & M-HB^{-1}N \end{pmatrix}. \tag{1}$$

いま $D=M-HB^{-1}N$ とすると，代入法の手順は以下のようになる．

1. $D\hat{\boldsymbol{x}}[C\setminus Y]=\hat{\boldsymbol{f}}[R\setminus X]$ に対応するDAEを解く．
2. $B\hat{\boldsymbol{x}}[Y]=\hat{\boldsymbol{f}}[X]-N\hat{\boldsymbol{x}}[C\setminus Y]$ に対応するDAEを解く．

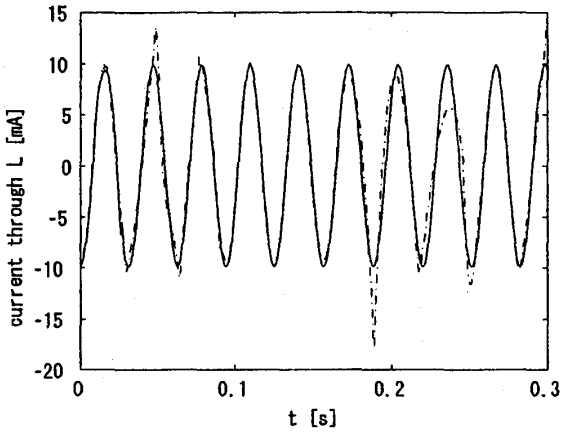

図1　インダクタを流れる電流：回路方程式の数値解（一点破線），代入法を用いた数値解（実線），解析解（点線）

多項式行列 $A(s)=sP+Q$ が P の各行に高々1個の非零成分を持つとき，以下の定理が成り立つ．

定理1．行列 P の零ベクトル全体の列集合を Y とする．小行列 $A[X, Y]$ が正則である任意の行集合 X に対し，D の冪零指数は A より1小さく，B は定数行列になる．

指数3の回路方程式で記述される電気回路[2]に対する実験結果を紹介する．回路方程式および代入法を適用して得られる指数2のDAEをMatlabのDAEソルバーRADAU5を用いて解き，解析解と比較する．代入法の数値解は解析解にほぼ一致しており，指数を減らすと誤差が小さくなることが図1から確認できる．

4.　混合解析における冪零指数最小化

本研究では，独立電源，従属電源，抵抗，インダクタ，キャパシタを含む線形時不変回路を対象とする．回路の結線構造を表すグラフを $G=(W, E)$ とする．独立電圧源，独立電流源の枝集合をそれぞれ E_g，E_h とし，$E_*:=E\backslash(E_g\cup E_h)$ を $E_y\cup E_z=E_*$，$E_y\cap E_z=\emptyset$ となるように E_y と E_z に分割する．G の全域木のうち，E_g，E_y，E_z，E_h の順に枝を優先的に含む木 T を，G の分割 (E_y, E_z) に関する基準木と呼ぶ．T の補木を $\bar{T}=E\backslash T$ と表す．E_g，$E_y\cap T$，$E_y\cap\bar{T}$，$E_z\cap T$，$E_z\cap\bar{T}$，E_h に対応する電流変数，電圧変数の集合をそれぞれ

$$I_g,\ I_y^\tau,\ I_y^\lambda,\ I_z^\tau,\ I_z^\lambda,\ I_h,$$
$$V_g,\ V_y^\tau,\ V_y^\lambda,\ V_z^\tau,\ V_z^\lambda,\ V_h$$

と書く．回路方程式 $A(s)\hat{x}(s)=\hat{f}(s)$ の係数行列 $A(s)$ は次のように書ける：

$$A(s)=\begin{array}{c|cccccc|cccccc}
 & I_g & I_y^\tau & I_y^\lambda & I_z^\tau & I_z^\lambda & I_h & V_g & V_y^\tau & V_y^\lambda & V_z^\tau & V_z^\lambda & V_h \\
\hline
R_g & I & O & * & O & * & * & O & O & O & O & O & O \\
R_y^\tau & O & I & * & O & * & * & O & O & O & O & O & O \\
R_z^\tau & O & O & O & I & * & * & O & O & O & O & O & O \\
R_y^\lambda & O & O & O & O & O & O & * & * & I & O & O & O \\
R_z^\lambda & O & O & O & O & O & O & * & * & O & * & I & O \\
R_h & O & O & O & O & O & O & * & * & O & * & O & I \\
\hline
S_y & O & I & & ** & ** & O & O & ** & ** & O & O & O \\
S_z & O & O & O & ** & ** & O & O & ** & ** & I & & O \\
\hline
S_h & O & O & O & O & O & I & O & O & O & O & O & O \\
\hline
S_g & O & O & O & O & O & O & I & O & O & O & O & O
\end{array}.$$

ただし，＊は定数行列，＊＊は多項式行列を表す．行列 $A(s)$ の行集合を

$$R=R_g\cup R_y^\tau\cup R_z^\tau\cup R_y^\lambda\cup R_z^\lambda\cup R_h\cup S_y\cup S_z\cup S_h\cup S_g,$$

列集合を C とする．$R_g\cup R_y^\tau\cup R_z^\tau$ はKCL，$R_y^\lambda\cup R_z^\lambda\cup R_h$ はKVL，$S_y\cup S_z\cup S_h\cup S_g$ は素子特性の式に対応する．このとき，$X=R\backslash(R_y^\tau\cup R_z^\lambda)$, $Y=C\backslash(I_z^\lambda\cup V_y^\tau)$ とおき，行変形(1)を考える．$A[X, Y]$ は対角成分がすべて1の上三角行列なので，代入法のステップ2は代入演算の繰り返しで実行できる．したがって，数値的に解くべきDAEはステップ1の式（混合方程式）のみになる．

本研究では，混合方程式の冪零指数最小化問題に対し，すべての節が2個以下のリテラルを持つ論理積形の充足可能性問題（2SAT）を用いて解く効率的なアルゴリズムを提案する．計算量は以下のようになる．

定理2．素子数 n の線形時不変回路において，混合方程式の冪零指数を最小化する分割と基準木は $O(n^6)$ 時間で求められる．さらに，素子特性のパラメータが代数的独立であるという仮定のもとで $O(n^3)$ に改良できる．

参考文献

[1] K. E. Brenan, S. L. Campbell, and L. R. Petzold: *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia, 2nd edition, 1996.

[2] M. Günther and P. Rentrop: The differential-algebraic index concept in electric circuit simulation, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 76, supplement 1, pp. 91-94, 1996.

[3] K. Murota: *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.